

DC-DC变换器在DCM模式下的输出能控性研究

以BUCK变换器为例，首先引入了混杂系统的理论，基于其中的切换线性系统理论建立变换器的模型。其次，运用切换系统的研究成果，分析变换器系统的输出能控性并给出其充要条件。最后对BUCK变换器的输出能控性进行分析与验证。研究表明当变换器的参数满足输出能控性条件时，能获得稳定的输出，反之输出无法得到稳定控制。

李晓静^{1,2} 吴爱国¹/1.天津大学电气与自动化工程学院 2.天津理工大学自动化学院



李晓静/讲师

关键词/Keywords

线性切换系统 ·
混杂系统 ·
变换器 ·
DCM ·
输出能控性 ·

DC-DC变换器是一个可以准确建模的系统，现有建立DC-DC变换器分析模型的方法，如著名的状态空间平均法模型，其局限性明显只对缓慢变化的信号有效，在高频开关状态与实际有较大的偏差；而且只能在宏观上了解变换器的性能，无法准确地得到其运动规律。

近年来，现代控制理论有了迅速发展，对控制系统的认识也从线性系统、非线性系统，上升到混杂系统。控制领域的学者对混杂系统这一概念的定义是：离散事件系统和连续变量系统相互作用而形成统一的动态系统。DC-DC变换器电路是一类典型的混杂系统，其连续动态系统部分体现在变换器每一个工作模式，离散事件动态系统则体现在功率开关的开通和关断上，应用混杂系统理论对其研究非常有意义。

混杂系统^[1]的模型有混合自动机模型、混合Petri网模型和切换线性系统模型等。其中切换线性系统模型是指系统包含有一系列的连续变量动态子系统，随着状态的不断演化，系统在不同的连续变量动态子系统之间不断地切换。目前，切换线性系统已成为混杂系统的一

类重要模型而受到广泛关注。切换线性系统建模重视的是状态之间的切换条件，所以在建模过程中就可以省去复杂的数学公式，极大地简化了建模过程。

在控制系统的分析与设计的现有文献中较常见的是对状态的能控性与能观性的探讨^[2-4]，而在实际的控制系统设计中，需要控制的是输出，而不是系统的状态，输出是状态的组合，但输出可能是某些状态的组合，故探讨输出的能控性也许更有意义。基于CCM模态的输出能控性分析已有相关文献^[5]，本文尝试建立DC-DC变换器工作于DCM模态下的切换线性系统模型，在此基础上讨论其输出能控性并进行验证，进而指导实际的工程应用。

DCM模式下的BUCK变换器分析

图1为BUCK电路的拓扑结构，设其中的所有元器件均为理想元器件。变换器工作于电感电流连续（CCM）与电感电流断续（DCM）模态的边界条件为

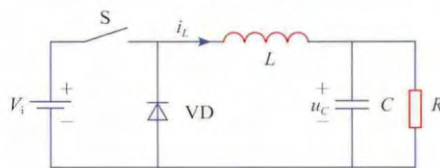


图1 BUCK变换器

$$K = 1 - D = \frac{2Lf}{R} \quad (1)$$

式中， $D = U_c/V_i$ 。

当 $1 - D < \frac{2Lf}{R}$ 时，BUCK变换器工作于CCM模态；当 $1 - D > \frac{2Lf}{R}$ 时，

BUCK变换器工作于DCM模态；当 $1 - D = \frac{2Lf}{R}$

时，BUCK变换器工作于CCM/DCM边界。

变换器工作于DCM模态的三种情况如图2所示。

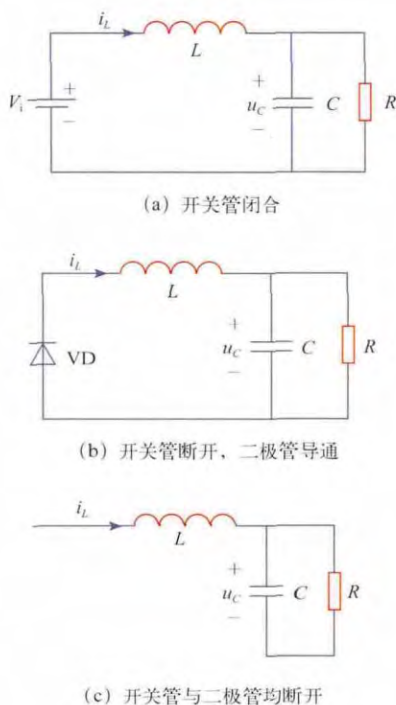


图2 BUCK变换器的DCM工作模式

切换线性系统模型

一般地，切换线性系统形式如下

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_{\sigma(t)}X(t) + B_{\sigma(t)}U(t) \\ Y(t) = C_{\sigma(t)}X(t) + D_{\sigma(t)}U(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中， $X(t)$ 为 n 维状态相量； $U(t)$ 为 p 维输入相量； $Y(t)$ 为 q 维输出相量。

$\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ 为分段常值函数， N 为全部切换模式之总和。

$\sigma(t) = j$ 为系统的一组实现，一组实现 (A_j, B_j, C_j, D_j) 称为一个切换模式。

1. 切换序列的定义

切换序列被定义为

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(A_j, B_j, C_j, D_j, h_j)\}_{j=1}^M \\ &= \{(A_1, B_1, C_1, D_1, h_1), \\ &\quad (A_2, B_2, C_2, D_2, h_2), \dots, \\ &\quad (A_M, B_M, C_M, D_M, h_M)\} \end{aligned} \quad (3)$$

式中， M 为切换序列的长度； $h_j \in (0, +\infty)$ 为切

换模式的持续时间，记 $T = \sum_{j=1}^M h_j$ ， T 为切换序列的持续时间。

式(2)和式(3)就是一个完整的切换线性系统模型。对于式(2)和式(3)定义的一个切换线性系统，设初始时刻为 t_0 ，给定系统的一个切换序列 Ψ 之后，切换模式的变化过程就可以完全确定，即在 $[t_0 + \sum_{l=1}^{m-1} h_l, t_0 + \sum_{l=1}^m h_l]$ 内（其中 $m=1, 2, \dots, M$ ），切换模式为 (A_j, B_j, C_j, D_j) ， $\forall j=1, 2, \dots, M$ 。

2. BUCK变换器的切换线性系统模型

BUCK开关变换器属于混杂系统，也是典型的切换线性系统。设状态相量为 $X(t) = [i_L \ u_C]^T$ ，输入相量为 $U(t) = V_i$ ，输出相量为 $Y(t) = u_C$ 。

则BUCK变换器切换系统模型的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_j X(t) + B_j U(t) \\ Y(t) = C_j X(t) + D_j U(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中参数矩阵如下。

1) 开关管闭合时

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & D_1 &= \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

2) 开关管断开，二极管导通时

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & D_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

3) 开关管与二极管均断开时

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} & B_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & D_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

由以上参数矩阵可知，BUCK变换器具有三种

切换模式, 分别为 (A_1, B_1, C_1, D_1) 、 (A_2, B_2, C_2, D_2) 和 (A_3, B_3, C_3, D_3) , 以 h_j , $j \in \{1, 2, \dots\}$ 表示每种切换模式的持续时间, 即变换器对应模式的工作时间。则切换序列为

$$\begin{aligned} \psi &= \{(A_j, B_j, C_j, D_j, h_j)\}_{j=1}^M \\ &= \{(A_1, B_1, C_1, D_1, h_1), \\ &\quad (A_2, B_2, C_2, D_2, h_2), \\ &\quad (A_3, B_3, C_3, D_3, h_3), \\ &\quad (A_1, B_1, C_1, D_1, h_4), \\ &\quad (A_2, B_2, C_2, D_2, h_5), \\ &\quad (A_3, B_3, C_3, D_3, h_6), \dots\} \end{aligned} \quad (8)$$

系统的状态方程式 (4) 加上切换序列式 (8) 即构成了变换器切换线性系统的模型。变换器的三种工作模式可认为是连续动态系统, 切换序列视为离散动态系统且决定了这三种工作模式的作用顺序以及相应的持续时间, 从而实现对变换器的控制。故该模型体现出了DC-DC变换器混杂系统的本质, 与状态空间平均法等作了近似处理的建模方式完全不同, 系统模型完全准确, 未作任何近似处理。在此模型的基础上, 可进一步地分析系统的能控性、能观性和输出能控性等特性。

数学及能控性的预备知识

1. 几个定义

(1) 列空间

定义 $\mathcal{R}^n$ 中的一个线性空间 $L_m(B)$ 为矩阵 B 的列空间, 其中矩阵 $B \in \mathcal{R}^{n \times p}$, 则 $L_m(B)$ 满足下式

$$L_m(B) = \{Y | Y = BX, X \in \mathcal{R}^p\} \quad (9)$$

(2) 最小不变子空间

定义一个线性空间

$$\langle A | W \rangle = \sum_{i=1}^n A^{i-1} W \quad (10)$$

为子空间 W 经矩阵 A 循环而生成的 A 的最小不变子空间。其中矩阵 $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, 线性子空间 $W \subseteq \mathcal{R}^n$, 且令

$$\langle A | B \rangle = \langle A | L_m(B) \rangle \quad (11)$$

2. 状态能控性的定义和充要条件

先给出状态能控性的定义以及充要条件, 然

后再讨论输出能控性。

(1) 状态能控性的定义

对于任意初始状态 $x_0 \in \mathcal{R}^n$ 和状态 $x_f \in \mathcal{R}^n$, 若存在一个切换序列和一个分段连续控制输入 $u(t)$, $t \in [0, T]$, 使得系统式 (2) 由 $x(0) = x_0$ 转移到 $x(T) = x_f$, 则称切换系统是状态能控的。

(2) 状态能控性的充要条件

定义如下线性子空间

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^N \langle A_i | B_i \rangle \\ W_2 &= \sum_{i=1}^N \langle A_i | W_1 \rangle \\ &\vdots \\ W_m &= \sum_{i=1}^N \langle A_i | W_{m-1} \rangle \quad m = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

则当且仅当 $\text{rank}(W_n) = n$ 时, 系统式 (2) 是状态能控的。

输出能控性及其充要条件

1. 输出能控性的定义

若存在一个切换序列和一个分段连续的无约束的控制输入相量 $u(t)$, 在有限的时间间隔 $t_0 \leq t \leq t_f$ 内, 使任一给定的初始输出 $y(t_0)$ 转移到任一最终输出 $y(t_f)$, 则称系统式 (2) 是输出能控的。

根据切换线性系统输出能控性定义, 结合数学预备知识, 可得输出能控性的充要条件。

2. 输出能控性的充分必要条件

当且仅当

$$\text{rank}[C_i W_n + L_m(D_i)] = q \quad \exists i \in \{1, \dots, N\} \quad (13)$$

系统式 (2) 是输出能控的。其中, q 为输出相量的维数。

BUCK变换器的输出能控性研究

对于BUCK变换器, 由于 $D_1 = D_2 = D_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故其输出能控性的充要条件变为

$$\text{rank}(C_i W_n) = 1 \quad \exists i \in \{1, 2, 3\} \quad (14)$$

又由于 $C_1 = C_2 = C_3 = [0 \ 1]$, 可用 C_1 代替 C_2 与 C_3 , 故上式转换为

$$\text{rank}(C_1 W_2) = 1 \quad (15)$$

分析计算过程如下

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^N \langle A_i | B_i \rangle = \langle A_1 | B_1 \rangle + \langle A_2 | B_2 \rangle + \langle A_3 | B_3 \rangle \\ &= B_1 + A_1 B_1 + B_2 + A_2 B_2 + B_3 + A_3 B_3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_{i=1}^N \langle A_i | W_1 \rangle = \langle A_1 | W_1 \rangle + \langle A_2 | W_1 \rangle + \langle A_3 | W_1 \rangle \\ &= 3W_1 + A_1 W_1 + A_2 W_1 + A_3 W_1 \end{aligned} \quad (17)$$

则

$$\begin{aligned} C_1 W_2 &= 3C_1(B_1 + A_1 B_1 + B_2 + A_2 B_2 + B_3 + A_3 B_3) + \\ &C_1 A_1(B_1 + A_1 B_1 + B_2 + A_2 B_2 + B_3 + A_3 B_3) + \\ &C_1 A_2(B_1 + A_1 B_1 + B_2 + A_2 B_2 + B_3 + A_3 B_3) + \\ &C_1 A_3(B_1 + A_1 B_1 + B_2 + A_2 B_2 + B_3 + A_3 B_3) \end{aligned} \quad (18)$$

又因为 $B_2 = B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 可得

$$\begin{aligned} C_1 W_2 &= 3C_1(B_1 + A_1 B_1) + C_1 A_1(B_1 + A_1 B_1) + \\ &C_1 A_2(B_1 + A_1 B_1) + C_1 A_3(B_1 + A_1 B_1) \end{aligned} \quad (19)$$

经计算, $C_1 B_1 = 0$, $C_1 A_3 B_1 = 0$, $C_1 A_1 B_1 = C_1 A_2 B_1 = 1/(LC)$, $C_1 A_1 A_1 B_1 = C_1 A_2 A_1 B_1 = C_1 A_3 A_1 B_1 = -1/(RLC^2)$, 所以得

$$\begin{aligned} C_1 W_2 &= 4C_1 A_1 B_1 + C_1 A_2 B_1 + \\ &C_1 A_1 A_1 B_1 + C_1 A_2 A_1 B_1 + C_1 A_3 A_1 B_1 \end{aligned}$$

即

$$C_1 W_2 = \frac{5}{LC} - \frac{3}{RLC^2} = \frac{5RC - 3}{RLC^2} \quad (20)$$

要满足输出能控性的充要条件, 就必须使

$$\frac{5RC - 3}{RLC^2} \neq 0 \quad (21)$$

由于BUCK变换器工作于DCM模态必要满足

$1 - D > \frac{2Lf}{R}$ 的条件, R 与 L 有此式的约束, 因此不可能出现 $L \rightarrow \infty$ 的情况, 由此可得出结论: 对于DCM工作模态下的BUCK变换器, 当 $R \rightarrow \infty$ 或 $C \rightarrow \infty$ 或 $RC = 0.6$ 时, BUCK变换器不是输出能控的。

BUCK变换器的输出能控性分析

在Matlab/Simulink里搭建BUCK变换器电路, 其中输入电压 $V_i = 200$ V, 开关频率 $f = 50$ kHz, 占空比 $D = 25\%$, 负载 $R = 20$ Ω , 电感 $L = 100$ μ H, 该

参数符合 $1 - D > \frac{2Lf}{R}$ 使变换器工作于DCM模态的条件,

电容 $C = 1\ 170$ μ F, C 的值根据 $C = \frac{U_o(1-D)}{8L\Delta U_o} T^2$

计算得到, 其中输出电压 $U_o = DV_{in} = 50$ V, ΔU_o 为纹波电压, 此处纹波电压为输出电压的0.2%, T 为开关周期。

如图3所示, 在 $0 \sim 0.2$ s 时间段, $R = 20$ Ω , 电感电流 i_L 断续, BUCK变换器工作于DCM模态, 此时 $RC \neq 0.6$, 系统满足输出能控性条件, 如图4所示输出电压 (u_C) 可控, 基本可以稳定在 60 V (DCM模式下 u_C 会超过 $U_o = DV_{in} = 50$ V)。图4为展开波形。

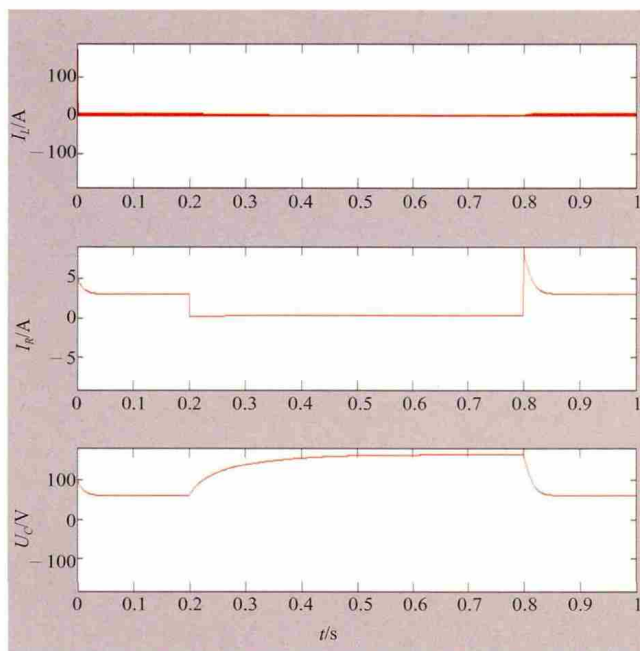


图3 DCM模态下BUCK变换器输出能控性的仿真结果总图

$t = 0.2$ s时刻, 负载电阻 R 由 20 Ω 突变为 512.82 Ω , $RC = 0.6$, 系统不满足输出能控性条件, 输出电压达到 165 V, 不再符合公式 $U_o = DV_{in} = 50$ V, 具体如图5所示。

$t = 0.8$ s时刻, 负载电阻 R 又由 512.82 Ω 突变为 20 Ω , 输出能控性条件又得到了满足, 输出电压恢复为可控状态, 波形与图4一致。

由仿真结果可见, 当工作于DCM模态的BUCK变换器的系统参数满足输出能控性条件时,

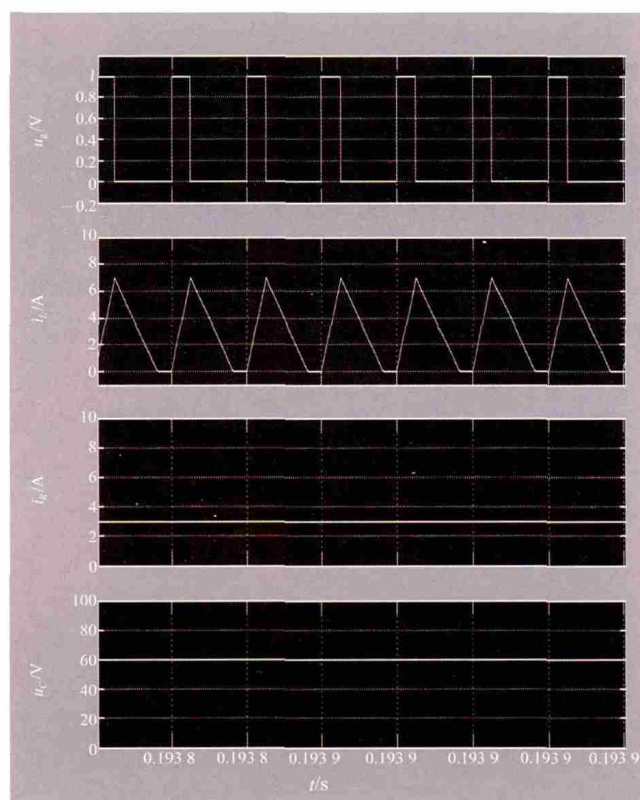
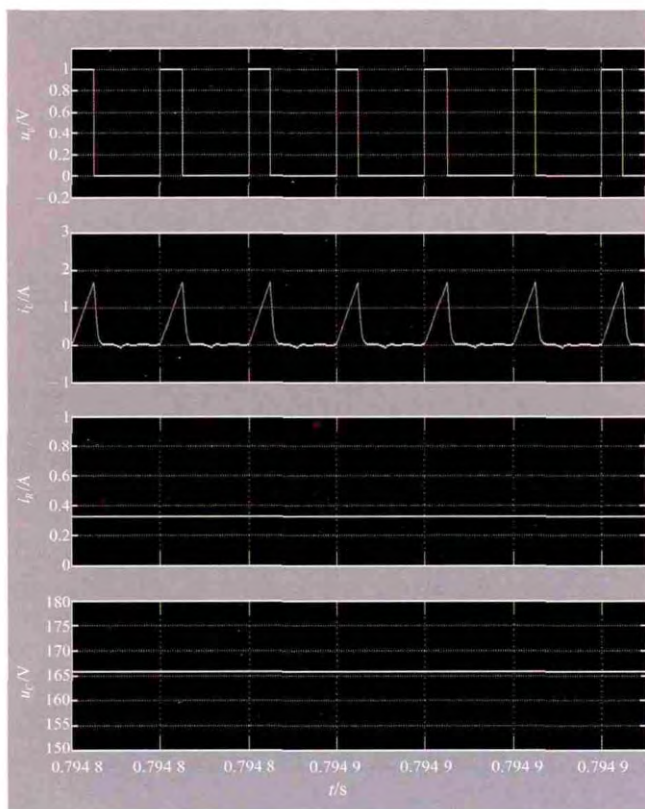


图4 DCM模态下BUCK变换器展开波形图

图5 DCM模态下BUCK变换器展开波形图 ($RC=0.6$)

在切换序列的作用下,变换器在三种模式之间切换。而一旦系统不具备输出能控性条件或者输出能控性条件遭到破坏,则无法实现系统输出的稳定和控制。

结束语

本文主要利用切换线性系统的理论建立DCM模态下的BUCK变换器的混杂系统模型,并在此基础上研究变换器的输出能控性问题,给出其输出能控的充要条件,最后通过仿真进行验证。

应用此方法建立的模型未作任何近似处理,完全准确,具有一般性,并且变换器被视为一个控制系统,从原有电工分析方法上升到系统的分析方法,从系统论角度建立其输出能控性等特性的分析思路。基于切换线性系统理论对变换器输出能控性的研究结果有利于发展电力电子系统的非线性控制策略,有利于提出新的电力电子系统控制设计和综合理论,有利于指导电力电子系统实际应用。

参考文献

- [1] 鲁思兆. 双向DC-DC变换器混杂控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.
- [2] 胡宗波, 张波, 邓卫华, 等. 基于切换线性系统理论的DC-DC变换器控制系统的能控性和能达性[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(12): 165-170.
- [3] Xie Guangming, Wang Long. Controllability of switched linear system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1401-1405.
- [4] 谢广明, 郑大钟. 一类混合动态系统的能控性和能观性研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 139-142.
- [5] 胡宗波, 张波, 胡少甫, 等. 基于切换线性系统的DC-DC变换器的输出能控性研究[J]. 电子学报, 2005, 33(2): 370-374.

(收稿日期: 2014-02-26) EA