

基于内点法的最优潮流计算

内点法是一种能在可行域内部寻优的方法，即从初始内点出发，沿着中心路径方向在可行域内部直接走向最优解的方法。其中路径跟踪法是目前最具有发展潜力的一类内点算法，该方法鲁棒性强，对初值的选择不敏感，在目前电力系统优化问题中得到了广泛的应用。本文采用路径跟踪法进行最优求解，首先介绍了路径跟踪法的基本模型，并且结合具体算例，用编写的Matlab程序进行仿真分析，验证了该方法在最优潮流计算中的优越性能。

孙舟 潘鸣宇 王伟贤/国网北京市电力公司



孙舟/工程师

关键词/Keywords

最优潮流 ·
内点法 ·
路径跟踪法 ·
仿真 ·

0 引言

电力系统最优潮流，简称OPF (Optimal Power Flow)。OPF问题是一个复杂的非线性规划问题，要求满足特定的电力系统运行和安全约束条件下，通过调整系统中可利用控制手段实现预定目标最优的系统稳定运行状态^[1-2]。针对不同的应用，文献[3-4]选择不同的控制变量、状态变量集合，不同的目标函数，以及不同的约束条件，其数学模型可描述为确定一组最优控制变量 u ，以使目标函数取极小值，并且满足

$$\begin{cases} \min_u f(x,u) \\ \text{S.t.h}(x,u) \\ g(x,u) \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\min_u f(x,u)$ 为优化的目标函数，可以表示系统运行成本最小，或者系统运行网损最小。 $\text{S.t.h}(x,u)$ 为等式约束，

表示满足系统稳定运行的功率平衡。 $g(x,u) \leq 0$ 为不等式约束，表示电源有功出力的上下界约束、节点电压上下线约束、线路传输功率上下线约束等。

电力系统最优潮流算法大致可以分为两类：经典算法和智能算法^[5]。其中经典算法主要是指以简化梯度法、牛顿法、内点法和解耦法为代表的基于线性规划和非线性规划以及解耦原则的算法，是研究最多的最优潮流算法，这类算法的特点是以一阶或二阶梯度作为寻找最优解的主要信息。智能算法主要是指遗传算法和模拟退火法等，这类算法的特点是不以梯度作为寻优信息，属于非导数的优化方法^[6-7]。

经典算法能按目标函数的导数信息确定搜索方向、计算速度快、算法比较成熟、结果可信度高，但对目标函数及约束条件有一定的限制，可能出现局部极小时难以收敛^[3,6]。而智能算法计算与导数无关、灵活性高、随机性强，但算法不稳定，结果不可信，并且控制参数需凭经验给出^[5,7]。

本文选择内点法进行潮流计算，具有其优越的性能，特别是路径跟踪法，算法收敛迅速，鲁棒性强，对初值的选择不敏感，迭代次数与系统规模或控制变量的数目关系不大。

1 路径跟踪法的基本数学模型

1.1 路径跟踪法的基本数学模型

内点法最初的基本思路是希望通过寻优迭代过程始终在可行域内进行，因此，初始点应在可行域内，并在可行域的边界设置“障碍”使迭代点接近边界时其目标函数迅速增大，从而保证迭代

点均在可行域的内点。但是对于大规模实际问题而言，寻找初始点往往十分困难。以下介绍的路径跟踪法只要求在寻优过程中松弛变量和拉格朗日乘子满足简单的大于0或者小于0的条件，即可代替原来必须在可行域内求解的要求，使得计算过程大为简化。

一般可以将最优潮流模型简化为如下的非线性优化模型

$$\text{Obj. min}_u f(x, u) \quad (2)$$

$$\text{S.t. } h(x, u) = 0 \quad (3)$$

$$g_-(x, u) \leq g(x, u) \leq g_+ \quad (4)$$

其中 $\min_u f(x, u)$ 为优化的目标函数， $\text{S.t. } h(x, u)$ 为等式约束， $g(x, u)$ 为不等式约束，路径跟踪内点法的基本思路是首先将式(4)的不等约束变成等式约束

$$g(x, u) + u = g_+ \quad (5)$$

$$g(x, u) - l = g_- \quad (6)$$

其中松弛变量 $l = [l_1, \dots, l_r]^T$ ， $u = [u_1, \dots, u_r]^T$ ，应满足

$$u > 0, \quad l > 0 \quad (7)$$

这样原问题就转化为问题A

$$\text{Obj. min}_u f(x, u) \quad (8)$$

$$h(x) = 0$$

$$\text{S.t. } \begin{cases} g(x) + u = g_+ \\ g(x) - l = g_- \end{cases} \quad (9)$$

然后，把目标函数改造成障碍函数，该函数在可行域内应接近于原函数 $f(x)$ ，而在边界时变得很大。一次可得带优化问题B

$$\text{Obj. min. } f(x) - u \sum_{j=1}^r \log(l_j) - u \sum_{j=1}^r \log(u_j) \quad (10)$$

$$h(x) = 0$$

$$\text{S.t. } \begin{cases} g(x) + u = g_+ \\ g(x) - l = g_- \end{cases} \quad (11)$$

其中扰动因子或者障碍因子 $u > 0$ 。当 l 或 u 接近边界时，以上函数将趋于无穷大，因此满足以上障碍目标函数的极小解不可能在边界上找到。这样就通过目标函数的变化把含不等式限制的优化问题A变成只含等式限制优化的问题B了，因此可以直接用拉格朗日乘子法来求解。

优化问题B的拉格朗日目标函数为

$$\begin{aligned} L = & f(x) - y^T h(x) - Z^T [g(x) - l - g_-] \\ & - w^T [g(x) + u - g_+] - u \sum_{j=1}^r \log(l_j) - u \sum_{j=1}^r \log(u_j) \end{aligned} \quad (12)$$

式中， y 、 z 和 w 均为拉格朗日乘子。

因此最后简化的求解问题就是求取上述表达式的极小解。

1.2 路径跟踪法的最优潮流求解思路

路径跟踪法的最优潮流求解过程就是对拉格朗日目标函数求极小值问题

$$\begin{aligned} L = & f(x) - y^T h(x) - Z^T [g(x) - l - g_-] \\ & - w^T [g(x) + u - g_+] - u \sum_{j=1}^r \log(l_j) - u \sum_{j=1}^r \log(u_j) \end{aligned} \quad (13)$$

式中， y 、 z 和 w 均为拉格朗日乘子。该问题极小值存在的必要条件是拉格朗日函数对所有变量及乘子的偏导数为0。即

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \nabla_x f(x) - \nabla_x h(x)y - \nabla_x g(x)(z+w) = 0$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = h(x) = 0$$

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial z} = g(x) - l - g_- = 0 \quad (14)$$

$$L_w = \frac{\partial L}{\partial w} = g(x) + u - g_+ = 0$$

$$L_l = \frac{\partial L}{\partial l} = z - \mu L^{-1}e \Rightarrow L_l^\mu = LZe - \mu e = 0$$

$$L_u = \frac{\partial L}{\partial u} = -w - \mu U^{-1}e \Rightarrow L_u^\mu = UWe + \mu e = 0$$

通过上述表达式可以解出

$$\mu = \frac{l^T z - u^T w}{2r} \quad (15)$$

定义： $Gap = l^T z - u^T w$ ，称为互补间隙。可得

$$\mu = \frac{Gap}{2r} \quad (16)$$

如果 x^* 是优化问题A的最优解，当 u 固定时， $x(u)$ 是优化问题B的解，那么当 $Gap \rightarrow 0$ ， $u \rightarrow 0$ 时，产生的序列 $\{x(u)\}$ 收敛至 x^* 。

建议采用 $\mu = \sigma \frac{Gap}{2r}$ 。式中 $\sigma \in (0, 1)$ 称为中心参数，一般取0.1，在大多数场合可获得较好的收敛效果。

通过偏导数为0的表达式可以可得内点法的修

正方程为

I

$L^{-1}Z$

0

0

0

I

0

0

0

0

I

0

0

0

0

I

0

$-\nabla_x^T g(x)$

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

$-\nabla_x^T g(x)$

0

0

H'

$\nabla_x h(x)$

0

0

$\nabla_x^T h(x)$

0

0

0

Δz

Δl

Δw

Δu

Δx

Δy

$=$

$\begin{bmatrix} -L^{-1}L_l^\mu \\ L_z \\ -U^{-1}L_u^\mu \\ -L_w \\ L_x \\ -L_y \end{bmatrix}$

(17)

求解方程可得到第k次迭代的修正量，于是最优解的一个新的近似解为

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_p \Delta x$

$l^{(k+1)} = l^{(k)} + a_p \Delta l$

$u^{(k+1)} = u^{(k)} + a_p \Delta u$

$y^{(k+1)} = y^{(k)} + a_d \Delta y$

$z^{(k+1)} = z^{(k)} + a_d \Delta z$

$w^{(k+1)} = w^{(k)} + a_d \Delta w$

(18)

式中， a_p 和 a_d 为步长

$a_p = 0.9995 \min\{\min(\frac{-l_i}{\Delta l_i}, \Delta l_i < 0; \frac{-u_i}{\Delta u_i}, \Delta u_i < 0), 1\}$

(19)

$a_d = 0.9995 \min\{\min(\frac{-z_i}{\Delta z_i}, \Delta z_i < 0; \frac{-w_i}{\Delta w_i}, \Delta w_i > 0), 1\}$

其潮流计算的流程图如图1所示，其中初始化部分包括：①设置松弛变量l和u，保证[l, u] T>0；②设置拉格朗日乘子w、y、z，满足[w <0, z>0, Y!= 0] T；③设置优化问题的初值；④取中心参数σ∈(0, 1)，给定计算精度，迭代次数初值K=0。

2 具体算例及程序实现流程

2.1 算例描述

以系统燃料最省为最优潮流的目标函数，求图2所示简化系统的系统燃料最省的最优潮流计算。线路传输功率边界、发电机有功无功出力上下界和燃料耗费曲线参数分别见表1、表2。所有数据都是以标么值形式给出，功率基准值为100 MV·A，母线电压上下界分别为1.1和0.9。

2.2 程序具体实现过程

针对上述系统，在该算例中，共有5个节点，相应的状态量为

$$\tilde{x} = \{\theta_1 \quad V_1 \quad \theta_2 \quad V_2 \quad \theta_3 \quad V_3 \quad \theta_4 \quad V_4 \quad \theta_5 \quad V_5\}$$

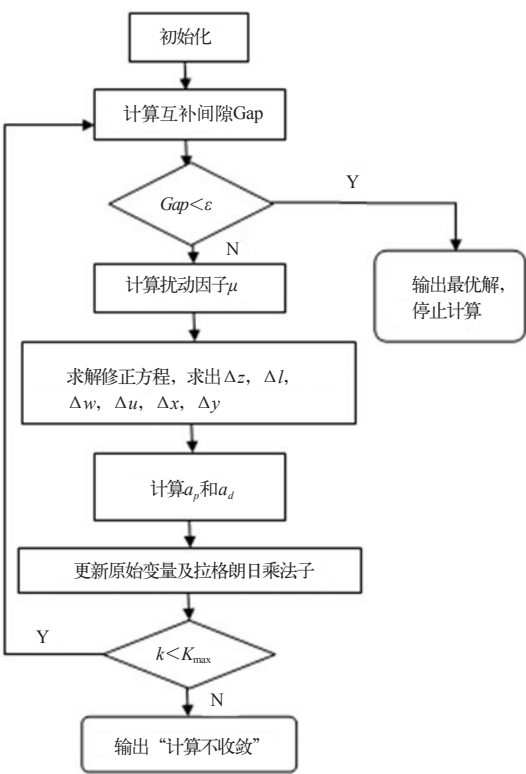


图1 内点法潮流计算流程图

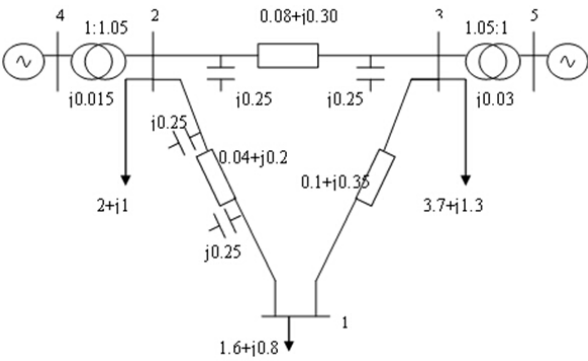


图2 简化系统示意图

表1 线路传输功率边界

支路号	首末端母线号	线路传输功率边界
1	1-2	2
2	1-3	0.65
3	2-3	2
4	2-4	6
5	3-5	5

表2 发电机数据

发电机 序号	母线号	出力上界		出力下界		燃料耗费曲线 参数		
		有功	无功	有功	无功	二次系数	一次系数	常数
1	4	8	3	1	-3	50.439 5	200.4 355	1 200.64
2	5	8	5	1	-2.1	200.55	500.745	1 857.20

系统中有2台发电机，没有其他无功源，因此控制变量为

$$\tilde{u}=\{P_{G1} \quad Q_{G1} \quad P_{G2} \quad Q_{G2} \quad \}$$

此处发电机和无功源的编号与及该单编号无关，是独立编号的。这是因为系统中一个节点可能接有多台发电机的缘故。因此系统中总变量共有14个

$$x=\{P_{G1} \quad Q_{G1} \quad P_{G2} \quad Q_{G2} \quad \theta_1 \quad V_1 \quad \theta_2 \quad V_2 \quad \theta_3 \quad V_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad V_5\}$$

最优潮流的数学模型如下。

目标函数

$$\min.(a_{21}P_{G1}^2+a_{11}P_{G1}+a_{01})+(a_{22}P_{G2}^2+a_{12}P_{G2}+a_{02})$$

约束条件：每个节点有两个潮流方程，共有10个等式约束条件，对非发电机而言

$$\Delta P_i=-P_{Di}-V_i\sum_{j=1}^5V_j(G_{ij}\cos\theta_{ij}+B_{ij}\sin\theta_{ij})=0 \quad (i=1,2,3)$$

$$\Delta Q_i=-Q_{Di}+V_i\sum_{j=1}^5V_j(G_{ij}\sin\theta_{ij}-B_{ij}\cos\theta_{ij})=0$$

对发电机节点

$$\Delta P_i=\sum_{k\in i}P_{Gk}-P_{Di}-V_i\sum_{j=1}^5V_j(G_{ij}\cos\theta_{ij}+B_{ij}\sin\theta_{ij})=0 \quad (i=4,5)$$

$$\Delta Q_i=\sum_{k\in i}Q_{Gk}-Q_{Di}+V_i\sum_{j=1}^5V_j(G_{ij}\sin\theta_{ij}-B_{ij}\cos\theta_{ij})=0$$

式中： $k\in i$ 表示第 k 台发电机接在节点 i 上。

不等式约束共有14个条件，分别是

$$\underline{P_{Gi}}\leq P_{Gi}\leq \overline{P_{Gi}} \quad (i=1,2)$$

$$\underline{Q_{Gi}}\leq Q_{Gi}\leq \overline{Q_{Gi}} \quad (i=1,2)$$

$$\underline{V_i}\leq V_i\leq \overline{V_i} \quad (i=1,\cdots,5)$$

$$-\overline{P_{ij}}\leq P_{ij}\leq \overline{P_{ij}} \quad (\text{对所有5条支路})$$

根据以上模型可以形成修正方程。

3 运行结果及分析

3.1 运行结果

以下对该算例的寻优过程用数字加以说明，

设4、5节点发电机均能有算法调节其出力。在初始化过程中各变量初值根据实际问题自行设置的，所用变量的处置如下：节点电压 $V_i=1$ ， $\theta_i=0$ ($i=1, 2, 3, 4$)；平衡节点 $V_i=1.05$ ， $\theta_i=0$ ；发电机出力有功取其边界值；松弛因子 $l_i=1$ ， $u_i=1$ ，当收敛条件 $\varepsilon=10^{-6}$ 时，需要迭代进行23次，见表3。

表3 迭代过程中各节点电压增量的变化情况

迭代次数	ΔV_1	ΔV_2	ΔV_3	ΔV_4	ΔV_5
1	-0.342 655	-0.167 831	-0.266 38	-0.229 198	-0.268 035 66
2	0.533 424	0.811 6598	0.121 828	0.753 734 7	-0.026 212 33
3	2.947 587 4	1.728 167 6	3.3253 11	1.437 764 3	3.001 650 322
4	0.904 429 6	-0.227 402	2.314 238	-0.410 468	2.406 142 062
5	0.031 756 5	0.258 9346	-0.189 91	0.277 925 2	-0.231 011 02
6	-0.301 923	-0.117 806	-0.313 84	-0.085 802	-0.291 482 16
7	-0.396 482	-0.116 134	-0.521 91	-0.068 149	-0.517 798 41
8	0.503 36	-0.045 965	1.092 422	-0.134 319	1.128 697 751
9	0.210 179 2	-0.052 28	0.570 784	-0.095 105	0.605 124 969
10	-0.150 019	-0.039 233	-0.134 09	-0.021 024	-0.114 350 18
11	-0.141 952	-0.039 185	-0.135	-0.022 72	-0.122 864 9
12	0.358 725 9	0.002 9517	0.638 045	-0.050 525	0.663 350 104
13	0.032 882 4	-0.007 168	0.096 6	-0.013 986	0.101 132 708
14	0.045 268 6	-0.007 506	0.127 766	-0.014 789	0.142 054 592
15	-0.037 015	-0.005 358	-0.016 55	1.24E-05	-0.007 407 59
16	-0.030 654	-0.005 288	-0.012 35	-0.001 191	-0.005 663 26
17	-0.012 631	-0.003 095	-0.004 73	-0.004 306	-0.003 333 63
18	0.001 641 8	-0.002 23	0.002 955	-0.004 447	-0.000 959 98
19	0.001 716 6	-0.002 398	0.001 914	-0.004 628	-0.002 530 85
20	0.000 595 1	-0.000 847	0.000 732	-0.000 783	-0.000 893 9
21	0.00 013 6	-0.000 195	0.000 187	0.000 165 7	-0.000 203 8
22	4.42E-08	-7.14E-08	8.44E-06	1.71E-05	-6.67E-08
23	-9.43E-09	7.65E-09	1.38E-07	2.40E-08	1.58E-08

同理记录迭代过程中各节点相角增量的变化情况和有功源有功、无功源无功增量的变化情况，将各次迭代过程中Gap变化情况绘制成曲线，可以显示出路劲跟踪法最优潮流计算的收敛特性，如图3所示。

3.2 结果分析

将最优潮流计算的结果和普通潮流计算结果

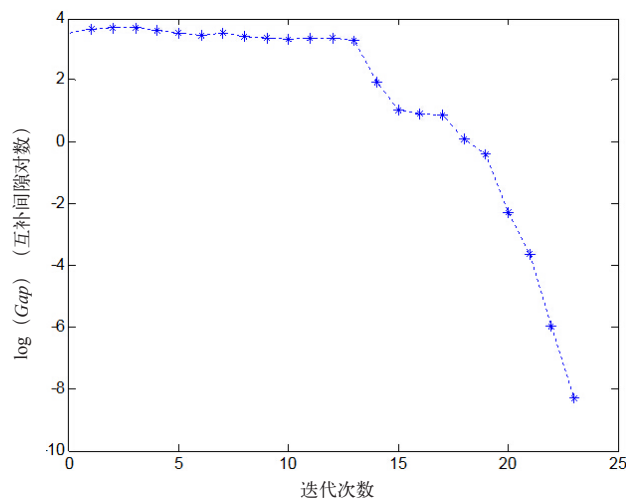


图3 5节点系统最优潮流内点法收敛特性

进行比较，其中PF表示为普通潮流计算。普通潮流计算中，发电机不会调节其出力。即4节点为PQ节点，5节点为平衡节点。见表4和表5。从表中可以看出，由于4机组比5机组的燃料曲线系数小，因此4机组有功出力增加，5机组有功出力减少。同时系统的网损、无功功率都有所增加。这是由于要将1节点电压抬高至其下界以满足不等式约束的要求而产生的副作用。但是网损的增加并不影响目标函数的优化。整个系统的燃料费用与不优化的潮流计算相比仍然减少了243.76\$。

表4 各有功源有功和无功源无功出力

发电机 序号	母线 序号	无功出力		有功出力		燃料费用/\$	
		OPF	PF	OPF	PF	OPF	PF
1	4	5.505 6	5.00	1.778 0	1.883 11	3 833.06	3 463.80
2	5	2.156 8	2.579 4	2.619 4	2.299 4	3 870.13	4 483.15
总计		7.662 4	7.5794	4.397 4	4.130 5	7 703.20	7 946.95

4 结束语

路径跟踪法在电力系统中应用与求解线性规划和非线性规划模型中，还是比较有优势的，具有算法收敛迅速，鲁棒性强，对初值的选择不敏感，其迭代次数与系统规模或控制变量的数目关系不大等特点。即在该简化模型中迭代次数为23次，但是由于其迭代次数是与系统规模关系不

表5 各节点电压向量

母线 序号	电压幅值		电压相角/rad	
	OPF	PF	OPF	PF
1	0.900 0	0.882 2	-0.007	-0.083 40
2	1.100 0	1.077 9	0.404 9	0.311 60
3	1.081 8	1.036 4	-0.057 1	-0.747 3
4	1.069 7	1.050 0	0.478 67	0.311 60
5	1.100	1.0500	0	0

大，对IEEE30、IEEE118节点系统的计算结果其迭代次数始终保持在21~27次。另外将水火电最优潮流问题分解为火电最优潮流子问题和水电子问题，提供了有效的协调算法。

但是对于路径跟踪法的影响因素还是比较多的，比如初始点的选择、迭代步长的选取、壁垒参数的调整、离散变量的处理等，如果选取不当可能会出现不恰当的结果，因此还需要研究者们做大量的工作。

参考文献

[1] 张伯明. 高等电力网络分析[M]. 清华大学出版社, 2007.

[2] 王锡凡. 现代电力系统分析[M]. 北京科学出版社, 2003.

[3] 张江红. 最优潮流算法综述[J]. 华北电力, 2010,07.

[4] Watkins A,Timms J,Bogges L.Artificial immune reconition systems(AIRS):an immune-inspired supervised learning algorithm[J]. Genetic Programming and Evolvable Machines,2004,5(3):291-317.

[5] 姚建国, 杨胜春, 高宗和, 等, 电网调度自动化系统发展趋势展望[J], 电力系统自动化, 2007, 31 (13) : 7-11.

[6] 赫玉国. 一种基于KarmarKar内点法的最优潮流算法[J]. 中国机电工程学报, 1996,11.

[7] University of Washingt on .Intelligent system in power syst -em.[EB/OL] .[2009-11-01] .http :// www. ee.washingt on .edu/energy/ apt/ nsf/ main .html.

作者简介

孙舟（1986-），男，硕士，工程师，主要研究电动汽车技术。

（收稿日期：2015-12-10） **EA**
（编辑：朱金凤）