

传递矩阵法和有限元法在汽轮发电机主轴转子动力特性分析上的对比分析

撰文 / 沈阳理工大学 韩辉 李荡

以汽轮发电机主轴转子为研究对象，利用集中质量参数法将转子简化为集中质量和若干轴段构成的模型。从传递矩阵法和有限元法两种方法的计算理论和具体对象分析两个方面进行了对比分析，结合 MATLAB 软件和 ANSYS 有限元软件求出了转子前三阶固有频率和模态振型。对比分析结果表明，两种方法在模型简化方面存在不同，但最终计算的结果比较接近，固有频率最大误差不超过 9%，并对存在偏

差的原因进行了分析，证实两种方法的可行性以及有限元法便于求解分析，从而指导了在转子动力特性分析上的应用。

一、引言

为了提高机器的工作容量和效率，要求增大转子的转速，减小各部分结构的重量，使得转子朝着高速和细长方向发展。那么，对转子的生产制造工作条件要求越来越严格，

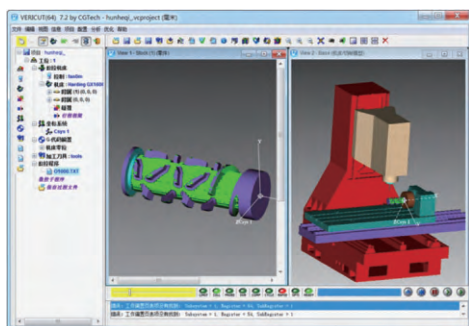


图 10

用 Vericut7.2 软件对程序进行仿真加工，确认程序正确无误后，就可以把程序传输至机床进行现场加工，图 11 所示是机床加工出来的实际零件。

七、结语

通过以上对混合铝零件四轴加工方法的探讨，我们可

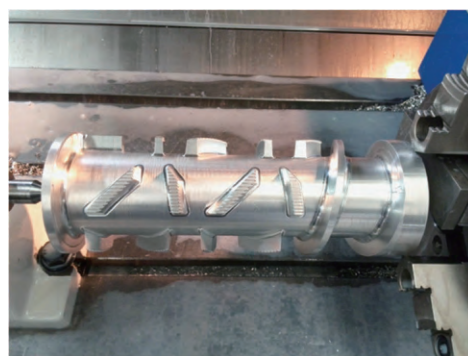


图 11

以认识到要做出理想、完美的刀路轨迹，不仅要掌握对 NX10.0 的 CAM 功能有深入的掌握，对 NX10.0 的 CAD 功能有熟练的运用，还要灵活的掌握 NX10.0 的“同步建模”功能，只有灵活结合这些操作技巧，才能完成高质量刀路轨迹的制作。

所以我们在保证安全可靠的前提下去提高经济效益。因此,我们更应该加强对转子动力特性的研究,以满足转子发展方向的潮流。为了保证转子生产工作的可靠性,我们非常有必要对转子动力特性进行理论分析,通过理论分析为实际生产工作提供必要的依据。

本文使用传递矩阵法并结合 MATLAB 软件编程和当今主流的有限元分析软件 ANSYS 对发电机主轴转子进行了动力特性分析,通过分析结果证明了两种方法的可行性以及有限元法的便利性。

二、传递矩阵法结合 MATLAB 软件对多盘转子的动力特性分析

1. 传递矩阵的建立

建立集中参数模型时,要根据轴径的变化和安装在轴上的零件的不同,将轴分为若干段。每段轴的质量按质心不变的原则被分配到轴段的两个端点。这样,在各轴段的端点便形成了集中参数质量圆盘,轮盘零件需要考虑它的转动惯量,集中质量圆盘之间以无质量的弹性梁相连接。弹性梁的抗弯刚度 EI 应和实际轴段的刚度等效。轴承用一等效弹簧和阻尼器代替。具体划分如下,首先根据支撑系统中刚性支撑(轴承)的个数划分跨度。在整个轴段内,凡是轴承、集中质量、轮盘、联轴器等所在位置,以及截面尺寸、材料有变化的地方都要划分为轴段截面。若存在变截面轴,应简化为等截面轴段,这是因为除了个别具有特殊规律的变截面轴段外,其他的变截面轴段的传递矩阵特别复杂。选用集总参数模型,对转子的总结点 N 有一定的要求,根据一个等截面梁的计算结果表明,如果要求集总化带来的固有频率误差尽可能的小,那么,节点总数 N 应满足如下关系:

$$N \geq 1 + 5.36r \quad (1)$$

式中, r 为要求计算的固有频率的最高阶数。在这里我们要求出前三阶固有频率,那么转子至少应该划分为 17 个节点。因此建立了如图 1 所示的集总参数模型。

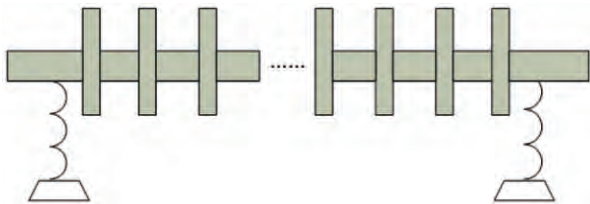


图 1 集中参数模型

我们定义 x 向为轴向,假设转子在 $yo z$ 平面内振动,对第 i 个部件,假定左右两端面的编号分别为 i 与 $i+1$,由截面 i 的挠度 y_i ,弹性转角 θ_i ,弯矩 M_i 及剪力 Q_i 所组成的阵列称为该截面的状态向量 $\{z\}_i$ 。即:

$$\{z\}_i = [y, \theta, M, Q]^T_i \quad (2)$$

任一部件两端界面的状态向量总存在一定的关系,即:

$$\{z\}_{i+1} = [T]_i \{z\}_i \quad (3)$$

式中, $[T]_i$ 称为该部件的传递矩阵。下面我们推导此传递矩阵。

对于带弹性支撑的刚性薄圆盘:图 2 是弹性支撑上的刚性圆盘。圆盘左右截面的剪力及弯矩分别用 Q_i^L 、 Q_i^R 、 M_i^L 和 M_i^R 表示,假设转子的挠度、弹性转角、弯矩和剪力都是以角速度 ω 按简谐规律变化。那么圆盘的惯性力和惯性力矩分别为 $m_i \omega^2 y_i$ 及 $(J_d - J_p)_i \omega^2 \theta_i$ 。由 D' Alembert 原理可得:

$$\begin{cases} Q_i^R = Q_i^L + m_i \omega^2 y_i - K_i y_i \\ M_i^R = M_i^L - (J_d - J_p)_i \omega^2 \theta_i \end{cases} \quad (4)$$

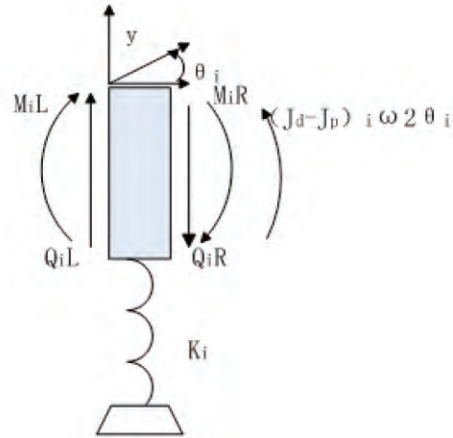


图 2 弹性支撑的刚性薄圆盘

$$\text{且有: } \begin{cases} \theta_i^R = \theta_i^L = \theta_i \\ y_i^R = y_i^L = y_i \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{写成矩阵形式: } \{z\}_i^R = [T]_i \{z\}_i^L \quad (6)$$

$$\text{即: } \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (J_p - J_d)\omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 - K_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L \quad (7)$$

式中, $[D]_i$ 为带弹性支撑刚性薄圆盘的传递矩阵。

无质量等截面的弹性轴段：设该轴段的编号为 i ，两端的编号分别为 i 及 $i+1$ ，如图 3 所示。在这里考虑剪切力变形的影响，由力的平衡条件及变形条件知该轴段两端的状态向量的关系如公式 (1~7) 所示。

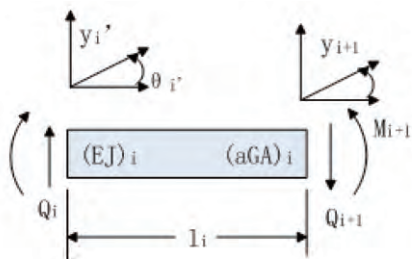


图 3 无质量的弹性轴段

$$\{z\}_{i+1} = [B]_i \{z\}_i^L \quad (8)$$

$$\text{即: } \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-\nu) \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R \quad (9)$$

式中， $[B]_i$ 即为无质量轴段左右截面的传递矩阵。

将以上两矩阵合并起来就可以建立第 $i+1$ 点与第 i 点状态向量之间的关系，即：

$$\{z\}_{i+1} = [B]_i \{z\}_i^L = [B]_i [D]_i \{z\}_i = [T]_i \{z\}_i \cdots \quad (10)$$

$$[T]_i = [B]_i [D]_i =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI}(1-\nu)(m\omega^2 - K_j) & l + \frac{\omega^2 l^2}{2EI}(J_p - J_d) & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-\nu) \\ \frac{l^2}{2EI}(m\omega^2 - K_j) & 1 + \frac{l}{EI}(J_p - J_d)\omega^2 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ l(m\omega^2 - K_j) & (J_p - J_d)\omega^2 & 1 & l \\ (m\omega^2 - K_j) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \quad (11)$$

可以看出，传递矩阵中的元素与涡动频率 ω 有关，假如该部件没有弹性支撑，或不计剪切变形的影响，或不计圆盘的转动惯性及陀螺力矩，那么在 (1-10) 式中可分别令 K_j 、 ν 、 J_d 及 J_p 为零即可。

通过图 2 所示的集中参数模型以及 (1-9) 式可以得出整个模型的传递矩阵：

$$\begin{cases} \{z\}_2 = [T]_1 \{z\}_1 \\ \{z\}_3 = [T]_2 \{z\}_2 = [T]_2 [T]_1 \{z\}_1 \\ \cdots \\ \{z\}_i = [T]_{i-1} \{z\}_{i-1} = [T]_{i-1} \cdots \end{cases} \quad (12)$$

$$[T]_1 \{z\}_1 = [A]_{i-1} \{z\}_i$$

其中： $[A]_{i-1} = [T]_{i-1} [T]_{i-2} \cdots [T]_1$ ($i=2, 3, \cdots, N+1$)

给出边界条件后，如 $M_1 = Q_1 = 0$ ， $M_{N+1} = Q_{N+1} = 0$ ，可得到满足此边界条件的频率方程为：

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}_N \quad (13)$$

这一奇次式有解的条件是剩余量为零。即 $\Delta(\omega^2) = 0$ 。按一定的步长在感兴趣的范围内选定 ω ， $\omega + \Delta\omega$ ， $\omega + 2\Delta\omega$ ， $\cdots$ 为试算频率，通过计算各试算频率的剩余量，如果对应于两相邻的试算频率 $\Delta(\omega^2)$ 异号，则说明在这两试算频率之间必有一频率能使 $\Delta(\omega^2) = 0$ ，即为一个满足边界条件的 ω 值，也是转子的一个同步正向涡动角速度或临界转速。用二分法仔细搜索就可以逐步逼近这一临界转速。在下面将具体的使用 MATLAB 软件针对图 2 所示的集中参数模型来编程求解。

2. MATLAB 软件编程分析

MATLAB 不仅语言编写容易而且更重要的是具有强大的矩阵计算功能以及图像绘制功能，对于工程运用计算能够显示它的强大功能。在这里将针对图 2 所示的模型使用传递矩阵法编程来求解其固有频率和振型。如图 2 所示模型只含有盘、轴和支撑单元，一共分成了 18 段等截面的无质量的弹性轴和 17 个相同的刚性圆盘，将支撑部分等效为弹簧支撑单元，在这里忽略了阻尼的影响。简化模型的具体各参数：各轴段长： $l_1 = 0.15\text{m}$ ；轴段直径 $d = 0.04\text{m}$ ；盘直径 $D = 0.2$ ；盘厚 $h = 0.025$ ；弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}\text{Pa}$ ；密度 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ；各圆盘的质量 $m = \rho \cdot \pi \cdot D^2 / 4 \cdot h$ ；三个支撑刚度均为： $K_1 = 2.0 \times 10^7\text{N/m}$ 。

在编程中 ω 的试算范围在 0 到 700rad/s， $\Delta\omega = 0.01$ 。通过软件计算可以得到其前三阶固有频率，通过归一化处理得到了前三阶模态振型。如表 1 和图 4 所示：

表 1 固有频率

阶数	固有频率 f (Hz)
第一阶	38.24
第二阶	81.23
第三阶	160.83

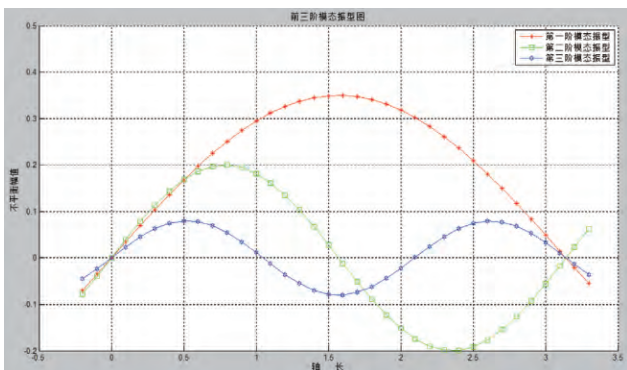


图 4 前三阶振型图

三、ANSYS 有限元软件对多盘转子的动力特性分析

1. 有限元分析理论

(1) 转子系统的有限元法。如图 5 所示，可以沿轴线把转子系统划分为圆盘、轴段和轴承座等单元。各单元间彼此在节点处联结，这些节点通常选在圆盘中心，轴颈中心及轴线的某些位置上，并按顺序进行编号。

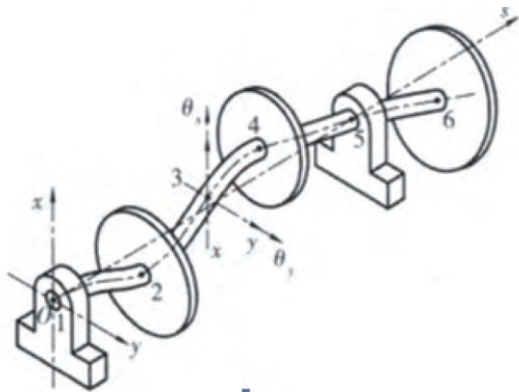


图 5 转子系统

以轴承座中心为 s 轴，可建立坐标系 $O-xys$ 。转子轴的任一截面，其位置可由轴心坐标 x 和 y 表示，截面的偏转角 θ_x 和 θ_y 表示。任一截面的位移用下面两个向量来表示：

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad \{u_2\} = \begin{Bmatrix} y \\ -\theta_x \end{Bmatrix} \quad (14)$$

通过节点与轴线垂直的截面，其位移列向量就称为该节点的位移向量。向量中的元素就是该节点的广义位移。通过单元分析，可建立该单元节点力与节点位移间的关系，综合各单元的运动方程。这样一个质量连续分布的转子的振动问题，就可以化为有限个自由度系统的振动问题，临界转速可以通过求解一组线性代数方程来求得。

(2) 转子系统的整体运动方程。对于具有 N 个节点，其间用 $N-1$ 个轴段连接而成的转子系统，设系统的位移向量为：

$$\{U\} = [x_1, y_1, \theta_{i1}, \theta_{i2}, x_2, y_2, \theta_{i2}, -\theta_{x2} \cdots x_N, y_N, \theta_{yN}, \theta_{xN}] \cdots (15)$$

综合各刚性圆盘、弹性轴段和轴承的运动微分方程，通过单元的直接叠加法即可得到系统的运动微分方程：

$$[M]\{U''\} + \Omega[J]\{U'\} + [K]\{U\} = \{Q\} \quad (16)$$

式中， $[M]$ 为考虑了移动惯性及转动惯性在内的一致质量矩阵； $[J]$ 为惯性矩阵； Ω 为回转角速度； $[K]$ 为刚度矩阵； $\{Q\}$ 为广义力； $\{U\}$ 为位移向量。

2. ANSYS 软件分析与结果

为了方便计算与仿真分析，对模型进行简化：将主轴转子看作为同一种材料，整个转子材质均匀分布，并且将质量等效对应的节点单元上；为了划分单元的均匀性，忽略轴上的圆角和倒角；轴承简化为弹性支撑；把轴承刚度设定为定值，忽略转速对轴承刚度和轴承负载的影响；简化为每个轴承为弹性支撑，可由两个相互垂直弹簧阻尼单元代替代替。在建模过程中我们选用了三个单元 beam188、combin14 和 mass21 来分别构成轴段、弹性支承和集中质量，从而构成了整个轴系如图 6 所示。

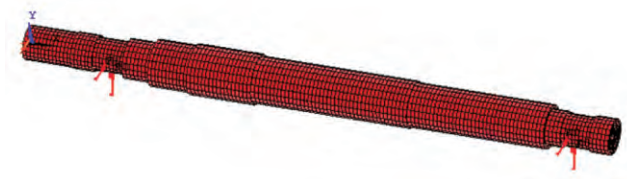


图 6 主轴转子有限元模型

ANSYS 仿真软件模态分析可分为前处理和后处理，前处理包括：材料参数设置，杨氏模量： $2e11\text{Pa}$ ；泊松比：0.3；密度： 7800kg/m^3 ；然后设定模态提取方式和求解频率；添加约束和相关的惯性载荷，考虑陀螺效应对固有频率的影响，进行求解。后处理主要是对求解的结果查看，在后处理中得到了主轴转子前三阶固有频率和振型图如表 2 和图 7~9 所示。

表 2 各阶固有频率

阶数	固有频率 f (Hz)
第一阶	35.34
第二阶	78.56
第三阶	155.13

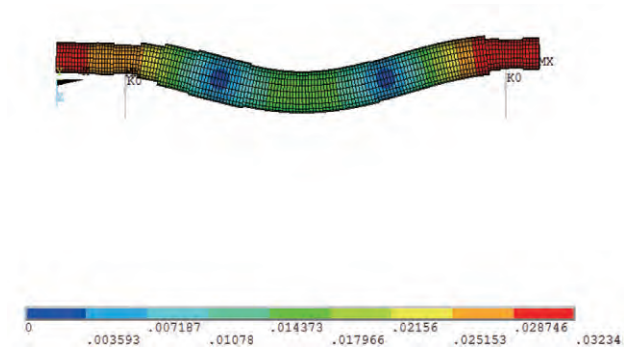


图 7 第一阶振型

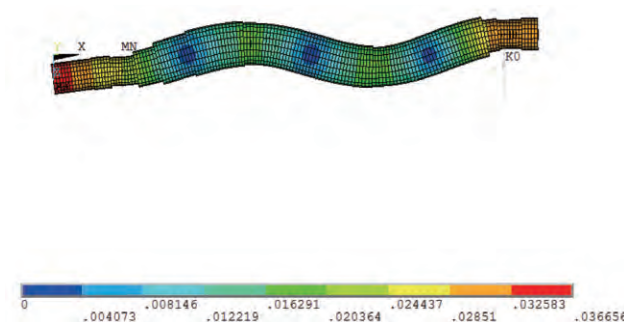


图 8 第二阶振型

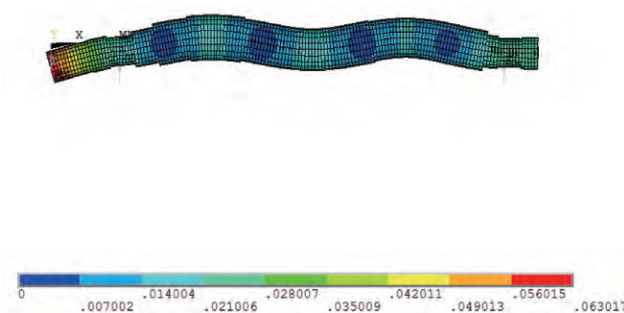


图 9 第三阶振型

四、结果比较

有限元仿真分析求得的固有频率和传递矩阵法的计算结果对比如表 3 所示。

从表 3 中可见,用这两种不同的方法对发电机主轴转子求出的固有频率最大偏差不超过 9%,求出的各阶振型基

表 3 计算结果比较

算法 计算阶数	传递矩阵法 f (Hz)	有限元分析法 f (Hz)	偏差
第一阶	38.24	35.34	8.2%
第二阶	81.23	78.56	3.4%
第三阶	160.83	155.13	3.6%

本一致,符合要求,所以验证了传递矩阵和有限元法的可行性,但是有限元方法求解频率方便,并更能直观显示求解后的振型和最大应力分布,因此,目前有限元仿真在求解转子固有频率和模态振型上应用更加广泛。

五、结论与分析

通过比较两种方法求出的结果,其中存在一定偏差的主要原因在于有限元法能够考虑轴向载荷,外阻内阻及剪切变形等因素,而且有限元的模型是质量的连续体对主轴转子单元划分更加精确,可以说是极小误差的反映出了转子的实际轮廓,传递矩阵法采用的是集中质量模型,对分析对象模型的建立不如有限元法精确。

对这两种方法计算的理论和计算结果的对比分析我们可以知道有限元模型是可以考虑多种因素在内的一个比较精确的模型,和传递矩阵法相比,有限元法需要占用更多的计算机存储与机时,随着现代科技的发展这已不再是值得担心的问题。可以对分析对象进行更加精确的网格划分,使计算结果精度更高,而且可以避免传递矩阵法中可能出现数值不稳定的现象。有限元仿真求解可以在后处理中直观的显示求解后的振型和最大应力,所以有限元仿真应用比较广泛。

因此,可以使用 ANSYS 有限元分析软件代替传递矩阵法进行转子动力特性分析,更加方便的求解转子动力特性,也为以后分析提供了一种新的思路。