对称三角形花键的公法线计算

陕西汉江机床有限公司　（汉中　723003）　张新宁　王　挺

摘要：详细介绍了对称三角形花键的公法线长度算法推导过程，并给出了数据验证的实例；通过对计算数据进行分析，总结出三角对称花键公法线存在的规律。

1. 公法线计算原理

这里以对称三角形齿型的外花键为例来说明。三角形花键参数有花键的分度圆D，齿数Z，三角形的齿型外角α，三角形的齿型内角β，三角形花键的公法线长度W_k，三角形花键的公法线跨齿数K。

在三角形花键的端面图中，以三角形花键的轴中心O为坐标（0，0），建立如图1所示的坐标系（为了展现算法，仅截取了局域图）。

假定该三角形花键有公法线W_k，类似于齿轮中的公法线W_k。那么，在上面的模型中，在三角形花键的齿型右侧直线上取两点M、A点，其中A点是齿型右侧直线和分度圆D的交点，M点是齿型线左、右两侧直线延长线的交点；在齿型的左侧上取一点B，其中B点是齿型左侧直线和分度圆D的交点。

如果直线BM绕坐标中心（0，0）逆时针方向旋转，当旋转角度为n（n为正整数）个齿间角（θ=360°/Z，有时也叫分度角）时，得到新直线$B'M'$；要使公法线W_k存在，必有$M'B' \parallel MA$。

由于$M'B'=MA$，所以M、M'、B'、A这四个点组成一个平行四边形。由平行四边形的判定定理可知：两对边分别相等的四边形为平行四边形；即只要能证明$MM'=AB'$即可。

2. W_k存在的充要条件

根据以上的原理，参照图2所示可以看出，设三角形齿型内角β，三角形齿型外角α，不难得到下列关系：

$$\beta=\alpha-\theta$$

其中θ=360°/Z。

设A点坐标为A（X_a，Y_a），B点坐标为B（X_b，Y_b），M点坐标为M（X_m，Y_m）（以下同，不再标记说明），则

$$X_a=D/2\times\sin(\theta/4)$$

$$Y_a=D/2\times\cos(\theta/4)$$

$$X_b=-X_a$$

$$Y_b=Y_a$$

AM的直线方程为

$$Y-Y_a=\tan(\beta/2+90°)\times(X-X_a)$$

对于M（X_m，Y_m）来说

$$X_m=0$$

$$Y_m=Y_a-\tan(\beta/2+90°)X_a$$

假定D_m是以O为圆心，以OM长度为半径的所在圆直径，$D_m=2OM$，即

$$D_m=2Y_m=2[Y_a-\tan(\beta/2+90°)X_a]$$

$$D_m=2Y_a-2\tan(\beta/2+90°)X_a$$

$$D_m=D\cos(\theta/4)-D\sin(\theta/4)\tan(\beta/2+90°)$$

过O（0，0）作直线MM_2的垂直线，交MM_2与M_3，交AB_2于

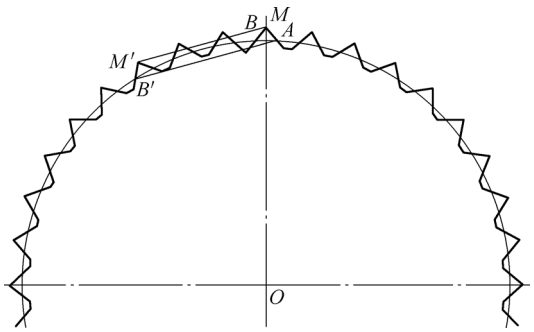

图1　三角花键公法线计算原理

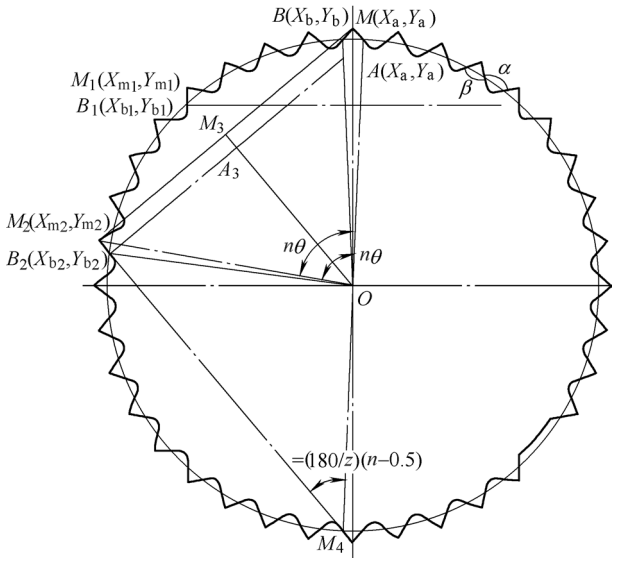

图2　三角花键公法线的算法推导模型

A_3。因为$MM_2 \parallel AB_2$，所以$OM_3 \perp AB_2$。

由于M、M_2在同一圆上，A、B_2在同一圆上，所以OM_3是MM_2的中垂线，也是AB_2的中垂线。

要使$MM_2=AB_2$，则$AA_3=MM_3$，即

$D/2\times\sin(n\theta/2+\theta/4)=D_m/2\times\sin(n\theta/2)$

$D\sin(n\theta/2+\theta/4)=[D\cos(\theta/4)-D\sin(\theta/4)\tan(\beta/2+90°)]\sin(n\theta/2)$

$\sin(n\theta/2+\theta/4)=[\cos(\theta/4)-\sin(\theta/4)\tan(\beta/2+90°)]\sin(n\theta/2)$

由上式可以得到

$\tan(\beta/2+90°)=[\cos(\theta/4)\sin(n\theta/2)-\sin(n\theta/2+\theta/4)]/[\sin(\theta/4)\sin(n\theta/2)]$

$\tan(\beta/2+90°)=\cot(\theta/4)-\cot(\theta/4)-\cot(n\theta/2)$

$\tan(\beta/2+90°)=-\cot(n\theta/2)$

根据上面假设，要使公法线W_k存在，必须在180°范围之内有效，所以$n\theta<180°$，$-\cot(\beta/2)=-\cot(n\theta/2)$。因为$\beta<90°$，所以

$$\beta=n\theta$$

$$n=\beta/\theta$$

设$K=n+1$为跨齿数，则

$$K=\beta/\theta+1$$

其中，n为正整数，且$0<n<=Z/2$。

这就是要使W_k存在的充要条件。

3. W_k的计算公式推导

由上面分析可知，OM_3是MM_2的中垂线，也是AB_2的中垂线。

设直线OM_3的斜率为Kom_3，直线AM的斜率为Kam，则

$Kom_3=\tan(n\theta/2+90°)$（$\because\angle MOM_2=n\theta$）

$Kam=\tan(\beta/2+90°)$

由上面推导的过程可知，$n=\beta/\theta$，所以

$Kom_3=\tan(\beta/2+90°)$

显然，$Kom_3=Kam$，即$OM_3 \parallel AM \parallel B_2M_2$，$B_2M_2 \perp MM_2$。平行四边形$MM_2B_2A$是一个矩形。

既然如此，W_k就等于AB_2的长度，也等于MM_2的长度。

设直线B_2M_2的延长线交分度圆于M_4点，那么A、M_4的连线必经过圆心O。因为过直径的圆周角为直角。

$W_k=D\sin[(n\theta+\theta/2)/2]$

$=D\sin[(n\times360°/Z+180°/Z)/2]$

$=D\sin[(n+0.5)180°/Z]$

设跨齿数$K=n+1$，则有

$W_k=D\sin[(K-0.5)180°/Z]$

上述算法对于单数齿和双数齿的对称三角花键测量都有效，是一种通用算法。

从上面推导过程和公式中，可以得到下列结论：只有当三角形齿型内角β为分度角θ的整数倍时，W_k才存在。否则不可能有W_k。当W_k确实存在时，满足下列条件

$$n=\beta/\theta$$

其中n为正整数，且$1\leqslant n\leqslant Z/2$。

设$K=n+1$为跨齿数，则

$W_k=D\sin[(K-0.5)180°/Z]$

这个公式和参数和齿轮的公法线W_k相类似，有时也叫三角形对称花键的跨齿距。

如果在坐标旋转的过程中，发现M_1B_1垂直于水平轴，则同样可得到

跨齿数$K=2n+1$，$W_k=2X_{m1}$

其中，n为模型齿旋转整数齿

型分度角（θ）的整数倍数，X_{m1}是点M_1（X_{m1}，Y_{m1}）的横坐标。

4. 对以上算法的数据验证

虽然上面的公式推导过程复杂，但是最后得到的公式并不复杂，所以验证数据就比较方便了。对于单一数据可用计算器计算；对于大量的数据可用Excel表中简单编程实现，或者其他高级编程来实现。在此用VB6.0编程来实现数据的验证，把计算的数据和实际在CAXA2007中作图的数据进行比较验证。

VB6.0编制的程序界面和计算数据，如图3所示。在CAXA2007下作图验证数据，如图4所示。

图3　三角花键跨齿距计算界面

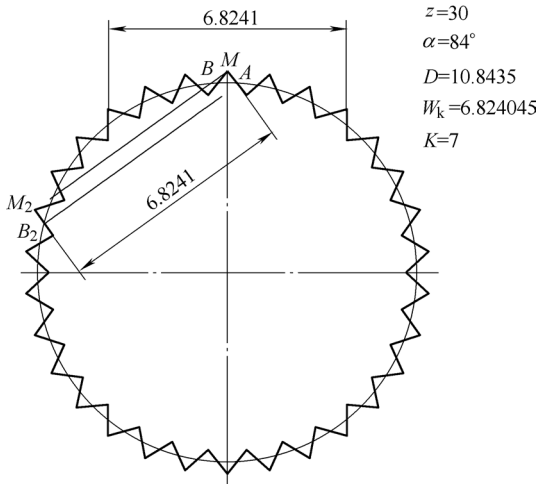

图4　W_k的算法数据验证

从计算数据和作图数据的结果来看是基本吻合的，数据差别很小，这是由于作图精度问题引起的（分度圆大小尺寸误差引起），属正常范围。

对于不同三角形花键齿型的W_k是否存在数据统计。在VB6.0的程序界面中，点击菜单栏的【跨齿数列表】，验证哪些三角花键确实存在W_k，并对统计数据列表显示。程序运行界面截图，如图5所示。

通过对计算数据进行分析，可以得到以下结论：对于三角花键，W_k是可以测量的（但不是所有的）。当公法线W_k存在时，对于90°的三角花键，$K=Z/4$，$Z=12,16,...$；对于80°的三角花键，$K=Z/9\times2$，$Z=18,27,...$；对于72°的三角花键，$K=Z/5$，$Z=10,15,...$；对于60°的三角花键，$K=Z/6$，$Z=12,18,...$。

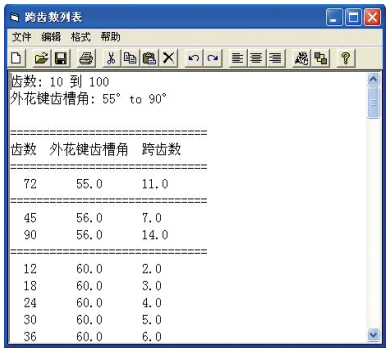

图5　三角花键跨齿数计算结果

5. 结语

通过对三角形花键公法线的测量算法进行详细的剖析，推导出了三角对称齿型公法线可测量的判断依据和公法线长度的计算公式，并对算法进行了详细的计算验证，总结出了常用三角对称齿型公法线存在的规律。这套软件的开发在实际工作中产生重要作用，解决了客户长期以来的困扰，为公司的产品顺利出产奠定基础。

参考文献：

[1] 詹昭平. 渐开线花键标准应用手册 [M]. 北京：中国标准出版社，1997.

[2] 陈宏钧. 实用机械加工工艺手册.第2版 [M]. 北京：机械工业出版社，2003.

[3] 钱培德. 中文 Visual Basic6.0傻瓜书 [M]. 北京：清华大学出版社, 1999.

MW（收稿日期：20170815）