基于ESPM的DCM模式下的PFC-BOOST DC/DC变换器分析

李民英，陈 宇，陈志伟

（广东志成冠军集团有限公司，广东 东莞 523718）

摘要：考虑了ESPM方法对于在PFC-BOOST的拓扑的适用性问题。描述了PFC-BOOST拓扑在DCM模式下的分数阶模型，这对接下来的控制起到了重要的作用。建立了ESPM控制下PFC-BOOST拓扑的DCM模式的分数阶模型的占空比求解模型，以及分数阶元器件的模型。最后，通过仿真证明使用ESPM方法运用在PFC的拓扑中的可行性及有效性。结果表明，使用分数阶的模型可以达到整数阶模型所不能达到的效果。

关键词：分数阶建模；PFC-BOOST变换器；分数阶元器件

Analysis of PFC-BOOST DC/DC converter in DCM mode based on ESPM

LI Minying, CHEN Yu, CHEN Zhiwei

(Guangdong Zhicheng Champion Group Co., Ltd., Dongguan 523718, China)

Abstract: The applicability of the ESPM method to the topology in PFC-BOOST is considered. The fractional order model of PFC-BOOST topology in DCM mode is described, which plays an important role in the subsequent control of this paper. The duty cycle solving model of the fractional order model of the DCM model of the PFC-BOOST topology under ESPM control and the fractional order component model are established. Finally, the simulation proves the feasibility and effectiveness of using ESPM method in PFC topology. The results show that using fractional order models can achieve effects that integer-order models cannot.

Key words: fractional order modeling; PFC-BOOST converter; fractional order components

0 引言

随着科学技术的迅速发展，人们对于电网质量的要求越来越高，在面对各种谐波的干扰时，普通的BOOST变换器的效率往往达不到所需的要求。在面对中小功率电源系统时，功率因数校正（PFC）是一个不错的选择，如图1所示。同时在低功率的应用中，不连续导通（DCM）模式往往比连续导通模式（CCM）具有更高的效率以及经济效益[1-2]。近几年，关于分数阶的建模和控制等概念在电气工程领域获得了广泛关注。对于分数阶电路的概念，现在已经产生了许多新颖的想法。例如，构建了电容器、电感器、忆阻器和CMOS超导传输线的分数阶模型等[3-4]。也可以建立一些很实用的分数阶的元素[5-6]。同时，还有一些关于分数阶元素的新颖的分数阶模型[7]，但是这些电路模型的很多特性

广东省“珠江人才计划”项目（2017ZT07G23）

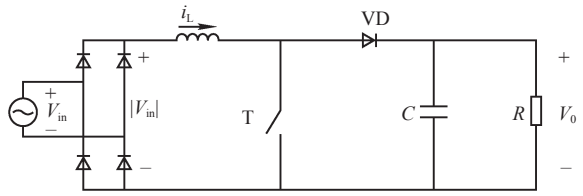


图 1　PFC-BOOST电路拓扑

Fig. 1 PFC-BOOST circuit topology

还未完全被分析透彻。

在现实中，系统的本质是属于分数阶的，而整数阶往往属于分数阶的特例[8]，在运用整数阶建模时难以更加精确地描述一些系统的动态过程。然而，这些问题都可以利用分数阶建模来解决。这是因为分数阶建模时，分数阶的微积分的阶次可以选择的范围更广。分数阶微积分可以弥补很多整数阶的不足之处。

1　分数阶PFC变换器在DCM情况下的数学模型

分数阶BOOST DC/DC变换器及其在DCM工作中的典型波形如图2所示，其中开关和二极管是理想的。电感器L和电容器C都是理想的分数阶器件。他们的阶数分别为α和β。根据S_T和S_D的状态，DCM中的变换器可以在一个稳态周期内分为三个开关状态[9]。

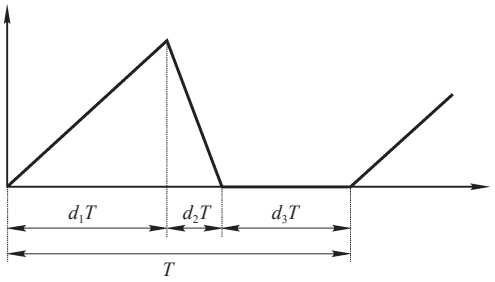


图 2　PFC-BOOST电路在DCM模式下电感电流波形

Fig. 2 Inductive current waveform of PFC-BOOST circuit in DCM mode

分别选择i_L和v_c作为状态变量，则变换器在状态1($0\sim d_1T_1$)的情况下可以被表示为

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha}=\dfrac{1}{L}U_D \\ \dfrac{d^\beta v_c}{dt^\beta}=\dfrac{v_c}{RC}=0 \end{cases} \tag{1}$$

在状态2($d_1T_s\sim(d_1+d_2)T_s$)的情况下，状态方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha}+\dfrac{1}{L}v_c=\dfrac{1}{L}U_D \\ \dfrac{d^\beta v_c}{dt^\beta}=\dfrac{v_c}{RC}-\dfrac{1}{C}i_L=0 \end{cases} \tag{2}$$

在状态3($(d_1+d_2)T_s\sim T_s$)的情况下，状态方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha}=0 \\ \dfrac{d^\beta v_c}{dt^\beta}=\dfrac{v_c}{RC}=0 \end{cases} \tag{3}$$

这里引入开关函数$\delta_q(t)(q=1,2,3)$来表达这三个状态，定义如下

$$\delta_1(1)=\begin{cases} 1 & 0<t<d_1T \\ 0 & d_1T<t<T \end{cases} \tag{4}$$

$$\delta_2(t)=\begin{cases} 1 & d_1T<t<(d_1+d_2)T \\ 0 & 0<t\leqslant d_1T,(d_1+d_2)T<t\leqslant T \end{cases} \tag{5}$$

$$\delta_3(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<(1-d_3)T \\ 1 & (1-d_3)T<t\leqslant T \end{cases} \tag{6}$$

可以得知在一个转换周期内，$\delta_1+\delta_2+\delta_3=1$，且$d_1+d_2+d_3=1$。这时令式（2）$\times\delta_1$+式（3）$\times\delta_3$+式（4）$\times\delta_2$，可以得到如下的矢量状态方程来描述具有DCM模式的变换器。

$$G_0(\rho^\alpha,\rho^\beta)x+G_1f^{(1)}(x)+G_2f^{(2)}(x)=U \tag{7}$$

式中，状态向量$x=[i_L\ v_c]^{Tr}$；常数向量$U=[(v_s/L)\ 0]^{Tr}$。

同时采用符号ρ^α和ρ^β分别替代微分算子d^α/dt^α和d^β/dt^β。矩阵$G_0(\rho^\alpha,\rho^\beta)$，$G_1$，$G_2$以及非线性函数$f^{(1)}(x)$和$f^{(1)}(x)$的计算公式如下。

$$G_1=G_2=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$G_0(\rho^\alpha,\rho^\beta)=\begin{bmatrix} \rho^\alpha & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & \rho^\beta+\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{cases} f^{(1)}(x)=\delta^{(1)}(x+E_1) \\ f^{(2)}(x)=\delta^{(2)}(x+E_2) \end{cases} \tag{10}$$

2 占空比的表达式

2.1 具有比例反馈控制的d_1表达式

当不考虑主电路滤波电容器的寄生参数时，输出电压为$v_0=v_c$。假设比较器在$t=t_s$时具有状态翻转，即t_s被定义为

$$t_s = t \mid V_k = V_{ramp} = nT + t_{on} \tag{11}$$

式中，t_{on}为开关接通的时间；$n=0,1,2,\cdots$表示开关周期数。

为简单起见，本文采用一个稳态循环进行分析，即$n=0$。

使用等效小参数方法求解方程可以得到以下迭代方程

$$\begin{cases} G_0(p)x_0 + G_1(p)f_{0m}^{(1)} + G_3(p)f_{0m}^{(2)} = u \\ G_0(p)x_1 + G_1(p)(f_{0m}^{(1)}R_1^{(1)}) + G_3(p)(f_{1m}^{(2)}R_1^{(2)}) = 0 \\ G_0(p)x_2 + G_1(p)(f_{2m}^{(1)} + R_2^{(1)}) + G_3(p)(f_{2m}^{(2)} + R_2^{(2)}) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

2.2 开关功能与占空比d_3的确定

采用文献[10]的方法，对于基本的二阶PWM变换器，如BOOST、BUCK和BUCK-BOOST变换器，当电感电流不连续时，一般情况下，$I_0=0$不考虑电路的寄生参数，m_1、m_2通常是函数的平均输入功率和平均输出电压（电容器电压）。因此，d_3可以表示为电源电压、平均状态变量$\bar{x}$和d_1的函数，即

$$d_3 = h_1(E, d_1, \bar{x}) \tag{13}$$

然后可以获得以下关系

$$\delta_3 = \delta_{30} + \varepsilon\delta_{30} + \varepsilon^2\delta_{32} + \cdots \tag{14}$$

2.3 闭环DCM操作系统的时变方程的解

2.3.1 主波的求解

因为DC/DC变换器具有低通滤波的特性，因此主波x_0可以被看作只包含直流成分，可得

$$G_0(0)a_{00} + G_1(0)d_{10}a_{00} + G_3(0)d_{30}(a_{00}+e_2) = u \tag{15}$$

2.3.2 一阶校正的解决方案

根据文献[18]的方法，可以得到$f_1^{(1)}$和$f_1^{(2)}$的主要项和余数为

$$\begin{aligned} f_{1m}^{(1)} &= (d_{10}a_{11} + b_{11}a_{00})e^{j\sigma} + cc \\ R_2^{(1)} &= (b_{10}\bar{a}_{11} + \bar{b}_{10}a_{11} + d_{11}a_{00}) + (b_{10}a_{11} + b_{20}a_{00})e^{j2\sigma} + \\ &\quad b_{30}a_{00}e^{j3\sigma} + cc \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f_{1m}^{(2)} &= [d_{30}a_{11} + q_{11}(a_{00}+e_2)]e^{j\sigma} + cc \\ R_2^{(2)} &= [q_{10}\bar{a}_{11} + \bar{q}_{10}a_{11} + d_{31}(a_{00}+e_2)] + (q_{10}a_{11} + q_{20}a_{00})e^{j2\sigma} + \\ &\quad b_{30}a_{00}e^{j3\sigma} + cc \end{aligned} \tag{17}$$

2.3.2 二阶修正的求解

同理非线性向量的二阶修正可以推导为

$$\begin{cases} f_2^{(1)} = \delta_{12}x_0 + \delta_{11}x_1 + \delta_{10}x_2 \\ f_2^{(2)} = \delta_{32}(x_0 + e_2) + \delta_{31}x_1 + \delta_{30}x_2 \end{cases} \tag{18}$$

3 仿真与实验验证

分数阶电感及电容的伯德图如图3所示。

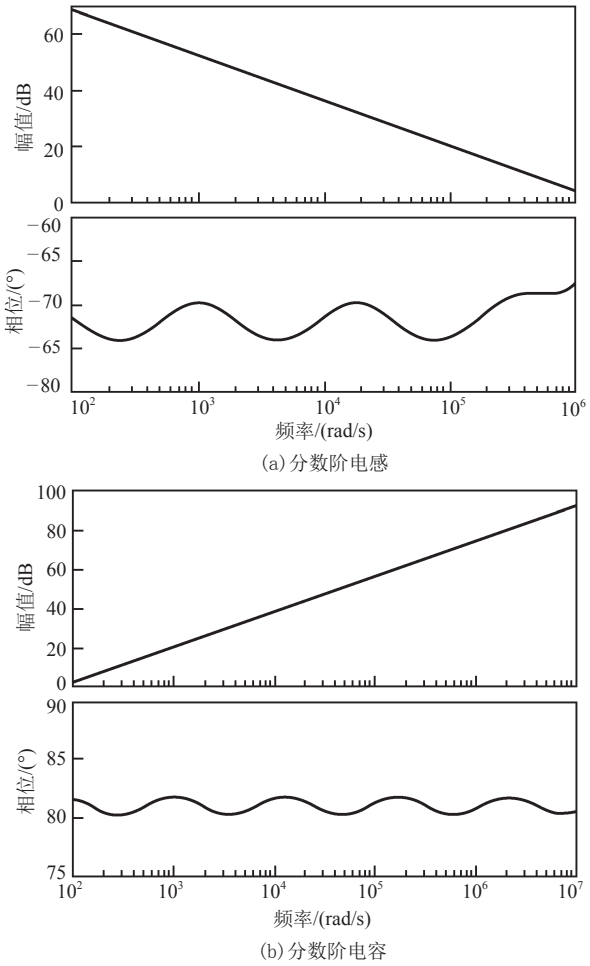


图 3 分数阶电感及电容的伯德图

Fig. 3 Bode diagram of fractional inductance and capacitance

从理论上讲，文献[11]给出了分数阶元素的阻抗定义，其中阶数－α电感的阻抗被定义为

$$Z_L^{\alpha} = (j\omega)^{\alpha}L = \omega^{\alpha}L[\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + j\sin(\frac{\alpha\pi}{2})] \tag{19}$$

具有以下频域特性。

1）幅频特性：具有20αdB/dec的恒定斜率。

2）相频特性：水平线，其值为$\alpha\pi/2$。

同理可得，β阶电容器的阻抗可以被定义为

$$Z_{\mathrm{L}}^{\beta}=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^{\beta}c}=\frac{1}{\omega^{\beta}c}[\cos(\frac{\beta\pi}{2})-\mathrm{j}\sin(\frac{\beta\pi}{2})] \quad (20)$$

具有以下频域特性。

1）幅频特性：具有-20βdB/dec的斜率。

2）相频特性：水平线，其值为$-\beta\pi/2$。

因为市面上的分数阶元件的数量非常少，必须要用其他的一些方法来构造一个合适的分数阶元件来完成等效电路，但是构造的这些分数阶元件往往会有各种各样的问题。

本文中，通过采用文献[10]中的方法，构造了分数阶电容器和电感器，其结构采用典型的链拓扑结构。其中R_i、C_i和L_i等参数可通过合成以获得阻抗网络的方法。

通过采用阻抗网络的合成方法，当L=477 μH，α=0.9，且近似曲线与理想曲线之间的最大误差小于2 dB时，主电路的参数选择为E=12 V，L=477 μH，C=10 μF，R=100 Ω，控制电路的参数选择为V_{r}=2.5 V，R=500 kΩ，C_{f}=2 μF；锯齿波的幅度和频率分别设定为V_{ram}=6 V，f_{s}=25 kHz($T=1/f_{\mathrm{s}}$)。

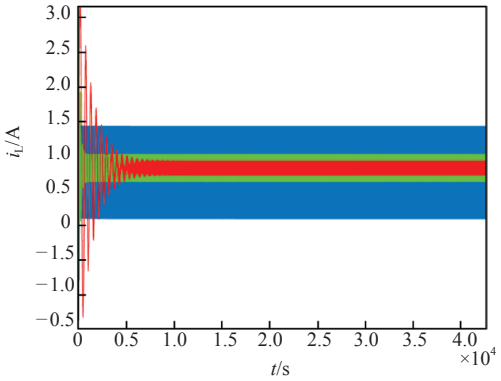
这时可以推导出主电路状态变量的稳态周期解，其中直流分量可以得到I_{dc}=0.763 4 A，V_{dc}=17.518 2 V。

$$\begin{aligned}i_{\mathrm{L}}=&0.763\ 4-0.445\ 2\cos\tau+0.458\ 6\sin\tau-\\&0.457\ 9\cos2\tau-0.070\ 9\sin2\tau-\\&0.001\ 6\cos3\tau+0.019\ 4\sin3\tau\\v_{\mathrm{c}}=&17.548\ 2-1.096\ 2\cos2\tau-3.203\ 6\sin\tau+\\&0.256\ 7\cos2\tau+1.143\ 1\sin2\tau-\\&0.241\ 8\cos3\tau-0.183\ 5\sin3\tau\end{aligned} \quad (21)$$

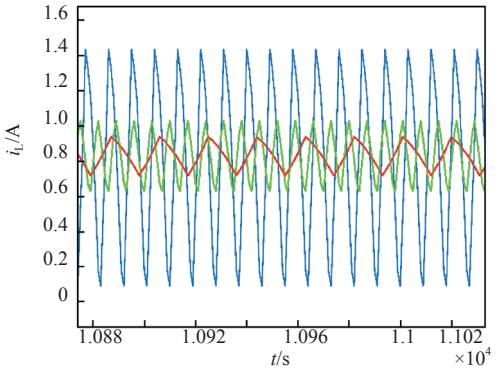
并且占空比d_1和d_3可以分别求解为$d_1\approx0.4$和$d_3\approx0.21$。

分数阶PFC-BOOST DCM变换器仿真波形如图4所示。

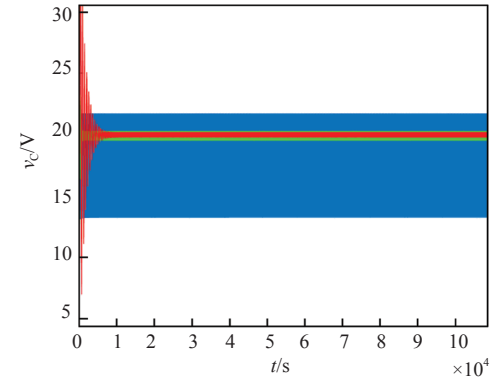
由图4可知，当阶次不同时，波形大抵是相似的，这就意味着当阶数不同时，直流量所占比



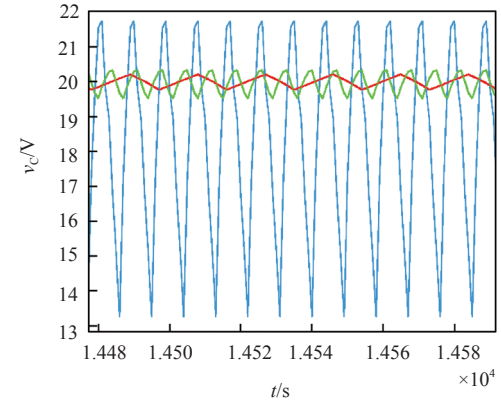
（a）当(α，β)=(0.9，0.8)时的电感电流



（b）电感电流波形放大图



（c）当(α，β)=(0.9，0.8)时的电容电压



（d）电容电压波形放大图

图 4　分数阶 PFC-BOOST DCM 变换器仿真波形

Fig. 4 Simulation waveform of fractional order PFC boost DCM converter

率并不会受到影响。同时，可以发现当阶数减少时，电流和电压的波形越来越大，而阶数越小时，过渡时间越少；阶数越大时，衰减的速度较慢，过渡时间较长。通过比较电压波形时，可以看出：(α，β)=0.9，(α，β)=0.8时的曲线相比于整数阶时中心有所偏离，造成这这个情形的主要原因是电容会出现饱和现象。

4 结束语

分数阶设备最近在工程应用中受到广泛关注。本文利用等效小参量法建立了关于在DCM模式下PFC-BOOST的模型。同时本文还给出了仿真的结果，以验证实用性及有效性。通过实验研究，证明了在PFC-BOOST拓扑中使用ESPM方法的优越性。同时发现当利用分数阶建模时，可以达到很多整数阶建模所不能达到的效果。

参考文献

[1] LAI J，CHEN D．Design consideration for power factor correction boost converter operating at the boundary of continuous conduction mode and discontinuous conduction mode[C]．Applied Power Electronics Conference，1993：267-273．

[2] LO Y，LIN J，OU S，et al．Switching-frequency control for regulated discontinuous-conduction-mode boost rectifiers[J]．IEEE Transactions on Industrial Electronics，2007，54(2)：760-768．

[3] MALEK H，DADRAS S，CHEN Y．Fractional order equivalent series resistance modelling of electrolytic capacitor and fractional order failure prediction with application to predictive maintenance [J]．IET Power Electronic，2016，9(8)：1608-1613．

[4] TRIPATHY M C，MONDAL D，BISWAS K，et al．Experimental studies on realization of fractional inductors and fractional-order bandpass filters[J]．Int ernational Journal of Circuit Theory and Applications，2015，43(9)：1183-1196．

[5] ELWAKIL A S．Fractional-order circuits and systems：an emerging interdisciplinary research area[J]．IEEE Circuits Systems Magazine，2010，10(4)：40-50．

[6] ELWAKIL A S，ALLAGUI A，MAUNDY B J，et al．A low frequency oscillator using a super-capacitor[J]．AEU-International Journal of Electronics and communications，2016，70(7)：970-973．

[7] HARTLEY T T，VEILLETTE R J，ADAMS J L，et al．Energy storage and loss in fractional-order circuit elements[J]．IET Circuits Devices Systems，2015，9(3)：227-235．

[8] TORVIK P J，BAGLEY R L．On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials[J]．Journal of Applied Mechanics，1984，51(2)：294-298．

[9] KIANPOOR N，YOUSEFI M，BAYATI N，et al．Fractional order modelling of DC-DC boost converters[C]．International Symposium on Industrial Electronics，2019：864-869．

[10] 陈曦．分数阶DC-DC变换器解析建模方法与非线性动力学特性研究[D]．广州：华南理工大学，2018．

[11] OUSTALOUP A，LEVRON F，MATHIEU B，et al．Frequency-band complex noninteger differentiator：characterization and synthesis[J]．IEEE Transactions on Circuits and Systems I：Regular Papers，2000，47(1)：25-39．

作者简介

李民英

李民英（1961－），男，高级工程师，主要研究方向为电气工程及其控制理论。

(收稿日期：2020－05－21)EA