城轨列车运行曲线计算仿真研究

蒋露晴[1]，王　超[2]，吴晓波[2]，宋美玉[1]，林　飞[1]

（1. 北京交通大学电气工程学院，北京 100044；2. 国家高速列车技术创新中心，山东 青岛 266000）

摘要：列车运行曲线是分析列车运动状态、能耗指标等性能的基础，也可作为驾驶员导引系统或列车自动控制系统的输入。首先分析了列车的动力学原理，根据列车受到的牵引力、制动力以及运行阻力建立了列车受力模型。选择最小时分和固定时分两种运行策略进行列车运行曲线计算，分析最小时分和固定时分运行策略包含的工况序列，结合给定线路的条件信息划分限速区间，对相邻工况区间的限速情况进行判断，以此确定各子区间的所含工况情况。最终以北京某地铁线路数据为例，输入至编写好的程序中，得到列车在最小时分和固定时分策略下的运行曲线。

关键词：运行曲线；城轨系统；最小时分；固定时分；限速区间

Calculation and simulation of urban rail train operation curve

JIANG Luqing[1], WANG Chao[2], WU Xiaobo[2], SONG Meiyu[1], LIN Fei[1]

（1. Beijing Jiaotong University Electrical Engineering, Beijing 100044, China;
2. National Innovation Center of High Speed Train, Qingdao 266000, China）

Abstract: The train operation curve is the basis for analyzing the performance of the train's motion state, energy consumption indicators, and can also be used as the input of the driver's guidance system or the automatic train control system. First, the dynamic principle of the train is analyzed, and the force model of the train is established according to the traction, braking force and running resistance of the train. Select the minimum time division and fixed time division two operation strategies to calculate the train operation curve, analyze the working condition sequence included in the minimum time division and fixed time division operation strategy, combine the line condition information of the given line to divide the speed limit interval, and compare the adjacent working conditions. The speed limit of the interval is judged to determine the operating conditions contained in each sub-interval. Finally, take the line data of a subway in Beijing as an example, input it into the written program, and get the train's operating curve under the minimum time division and fixed time division strategy.

Key words: operation curve; urban rail transit system; minimum time; fixed time; speed limit zone

0　引言

随着我国经济快速发展，城镇化水平不断提高，城市轨道交通系统因其快速性、舒适性、容量大、污染小和安全可靠性高等的特点而快速发展起来[1]。截至2020年底，中国开通城轨交通的城市已有45个，运营线路长度达7 969.7 km，全年累计客运量达175.9亿人次，完成建设投资共6 286亿元，创造了年度已完成建设投资额历史

国家高速列车技术创新中心资助

新高[2]。在城市轨道系统设计和运行管理中，其中一项十分重要的工作是对列车运行曲线进行研究和分析，这不仅可以优化单列车节能，还可以为多列车节能优化提供基础。

对于列车运行曲线的研究，国外学者进行了大量的研究实验。最早开始于1968年，日本学者Ichikawa利用Pontryagin极大值原理求解了两站之间降低列车能耗的问题，并给出了优化控制规律[3]。文献[4]基于列车短程线路的最小能耗模型，提出了包含最大加速、惰行和最大制动三种工况的节能驾驶策略。文献[5]推导出列车长距离线路运行时的节能运行策略，其中包括最大加速、巡航、惰行和最大制动四种工况。文献[6]提出了离散型列车最优控制模型，在限速参数和坡道信息不变的情况下寻找最优驾驶策略。文献[7]提出了在起伏坡道上利用神经网络局部优化与遗传算法全局优化配合，计算列车优化速度操纵曲线。文献[8]利用模糊控制算法优化列车运行曲线。文献[9]通过优化整个路线的运行时间分配来制定节能运行策略，综合考虑了限速、坡度、运行时分、牵引力和制动力等因素。文献[10]采用动态规划法求解了列车节能运行优化问题。文献[11]对蚁群算法、遗传算法和动态规划算法三种常用的算法进行比较，得出多种算法求解最优运行曲线具有较好的鲁棒性。相对于国外，国内地铁设计起步较晚，但也取得了很大的成果。而且目前微型计算机得以广泛应用，利用其高效率、高准确度的特点编写关于地铁列车运行曲线的软件十分必要，从而可以提高地铁设计的质量和效率。

1 列车动力学模型

研究城轨交通系统列车运行曲线的设计，首先要研究列车的动力学原理，通过研究相关动力学原理对列车进行建模。列车运行模型是一个很复杂的非线性力学系统模型问题，实际的列车运行计算也是一个困难的工程问题[12]。但实际列车在运行过程中，考虑到车辆编组较少和列车长度相对于运行路程十分小的原因，可以视作单质点模型去分析。列车的受力可以分为列车牵引力、制动力和运行阻力[13]。

（1）列车牵引力

从牵引变电站发出的电能，经过接触网、受电弓或者第三轨使列车受电，输入给列车的电能还要经过列车的动力传动装置，将输入的电能转化成动轮的机械能，旋转的动轮与轮轨接触，通过相互之间的粘着作用产生牵引力[14]。列车的牵引力一般是由仿真实验得到，一般情况下，牵引特性曲线可以分为三个区间，分别是恒转矩区间、恒功区间以及自然特性区间。列车运行在恒转矩区间时，牵引力保持不变；运行在恒功区间时，列车的牵引力与速度大小成反比下降；运行在自然特性区间时，列车的牵引力与速度大小的二次方成比例下降[15]。其牵引特性曲线如图1所示。

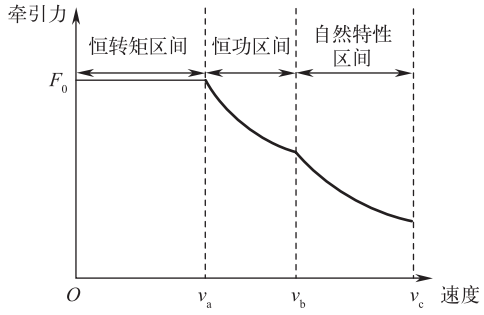

图 1 牵引特性曲线

Fig. 1 Traction characteristic curve

对应每个区间的数学表达式为

$$F(v)=\begin{cases}F_0, & 0\leqslant v<v_a\\ F_0v_a/v, & v_a\leqslant v<v_b\\ F_0v_av_b/v^2, & v_b\leqslant v<v_c\end{cases} \tag{1}$$

式中，F为列车牵引力，kN；F_0为恒转矩区间牵引力，kN；v为列车速度，m/s；v_a为恒转矩区间与恒功区间的转折速度，m/s；v_b为恒功区间与自然特性区间的转折速度，m/s；v_c为自然特性区间的最终速度，m/s。

（2）列车制动力

列车制动力是与列车的运动方向相反的力，由列车上的制动装置产生。电制动力是根据列车的制动特性曲线得到的。相较于列车的牵引特性曲线，列车的制动特性曲线一般不考虑恒功率

区间，认为列车的制动特性曲线由恒制动转矩区间和自然特性区间组成。其制动特性曲线如图2所示。

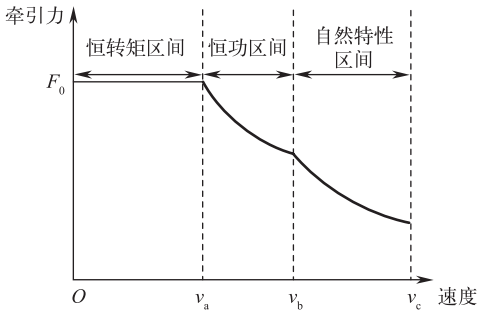

图 2　制动特性曲线

Fig. 2 Braking characteristic curve

对应每个区间的数学表达式为

$$B(v)=\begin{cases}B_0, & 0\leqslant v<v_d\\ B_0v_d^2/v, & v_d\leqslant v<v_e\end{cases} \tag{2}$$

式中，B为列车制动力，kN；B_0为恒转矩区间制动力，kN；v为列车速度，m/s；v_d为恒制动转矩区间与自然特性区间的转折速度，m/s；v_e为列车自然特性区间的最终速度，m/s。

（3）列车运行阻力

列车在运行的过程中，除了受到牵引力和制动力的作用，还不可避免地会受到外界因素的作用，即阻力作用。按受到阻力的类型可以将其受到的阻力分为基本阻力与附加阻力[16]。列车运行阻力的公式见表1。

表 1　列车运行阻力公式

Tab. 1 Train running friction formula

阻力公式 (N/kN) 总阻力：$w(v)=w_0(v)+g(x)$		
基本阻力 $w_0(v)$	$w_0(v)=a+bv+cv^2$，其中 a、b、c 均为车辆的基本阻力参数	
附加阻力 $g(x)$	坡道阻力	$w_i=i$，其中 i 为坡道千分数 (‰)，上坡为正，下坡为负
	曲线阻力	$w_r=k/R$，其中 k 为经验常数；R 为曲线半径 (m)
	隧道阻力	$w_s=0.000\,13L_s$，其中 0.000 13 为实验常数，L_s 为隧道长度 (m)

2　列车能耗模型

城轨交通系统的总能耗可以分为列车运行能耗和站内运营能耗[17]。站内运营能耗包括照明、空调器及电梯等能耗。本文中的列车能耗模型不考虑站间运营能耗和列车用于空调器、照明系统等辅助系统的能耗，而主要考虑列车运行过程中的牵引能耗。图3为列车关于牵引传动系统的能量流动图，牵引变电站发出的电能流经接触网，从第三轨或者受电弓供给到列车。由于供给到列车的电能要流经列车中的变流器、感应电动机和动力传动装置，这一过程中流经每一环节都会产生能量损失，使得供给到列车的能量并不完全用于列车牵引。所以在建立列车能耗模型时，要相应地考虑每一环节的效率。

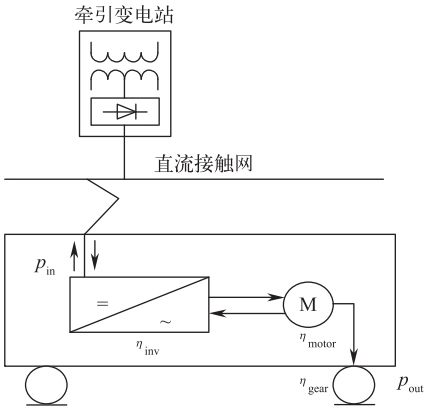

图 3　牵引传动系统

Fig. 3 Traction drive system

图3中，p_{in}和p_{out}分别代表列车受电弓处的输入功率和轮轨处的输出功率；η_{inv}、η_{motor}和η_{gear}分别为列车中的变流器、感应电动机和动力传动装置的效率。

因此，当列车运行在牵引工况下，列车受电弓处的输入功率和轮轨处的输出功率为

$$\begin{cases}p_t(t)=p_{in}=p_{out}/(\eta_{inv}\eta_{motor}\eta_{gear})\\ p_{out}=Fv\end{cases} \tag{3}$$

当列车运行在制动工况下，列车受电弓处的输出功率和轮轨处的功率为

$$\begin{cases}p_b(t)=p_{in}=p_{out}\eta_{inv}\eta_{motor}\eta_{gear}\\ p_{out}=Bv\end{cases} \tag{4}$$

列车的牵引能耗为

$$E_t=\int Fv/(\eta_{inv}\eta_{motor}\eta_{gear})\mathrm{d}t \tag{5}$$

再生制动能量为

$$E_{\mathrm{b}}=\int Bv(\eta_{\mathrm{inv}}\,\eta_{\mathrm{motor}}\,\eta_{\mathrm{gear}})\mathrm{d}t \tag{6}$$

3 最小时分运行曲线计算

当给定地铁列车的线路参数、车辆信息和限速条件之后，列车在站间的运行策略的选择有很多种，目前比较典型的列车运行策略有最小时分运行策略和固定时分运行策略[18]。不同实际情况中，运行策略的选取也不同。最小时分运行策略是指列车在该策略下运行时间最短，该策略包含最大牵引、匀速和最大制动三种工况[19]。在牵引工况时，保证列车以最大牵引力实现列车的牵引；匀速工况时，列车以不超区间限速的最大速度匀速行驶；在制动工况时，列车以最大制动力实现列车的制动。最小时分运行策略示意图如图4所示。

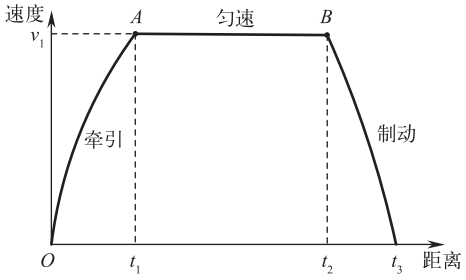

图 4 最小时分运行策略示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the minimum time division operation strategy

每种工况列车受到的合力表达式为

$$c(v)=\begin{cases}F(v)-w(v), & 0\leqslant t<t_1\\ 0, & t_1\leqslant t<t_2\\ B(v)-w(v), & t_2\leqslant t<t_3\end{cases} \tag{7}$$

从初始点O开始，每经过一个时间步长就计算一次，每次计算都更新一次列车所受的合力，当速度到达v_1时，停止计算，将每步计算结果累加起来就可以得到OA段（其他段原理类似）的时间以及牵引能耗值，相应的计算公式为

$$v_{i+1}=v_i+\frac{F_{i合}}{m}\Delta t \tag{8}$$

$$s_{i+1}=s_i+\frac{1}{2}\times\frac{F_{i合}}{m}\Delta t^2 \tag{9}$$

$$E_{i+1}=E_i+F_{i牵}\Delta s \tag{10}$$

$$t_{i+1}=t_i+\Delta t \tag{11}$$

最小时分运行策略算法流程图如图5所示。最小时分算法步骤为：

1）对车辆及线路信息进行初始化设置。

2）根据不同的限速条件划分高低限速区间。

3）判断列车目前所处的工况是否处于牵引匀速或者制动工况。

4）利用式（8）～式（11）计算当前速度、位置和功率等参数。

5）判断是否到达终点，若没有，$t_{i+1}=t_i+\Delta t$，返回步骤3)，直至结束。

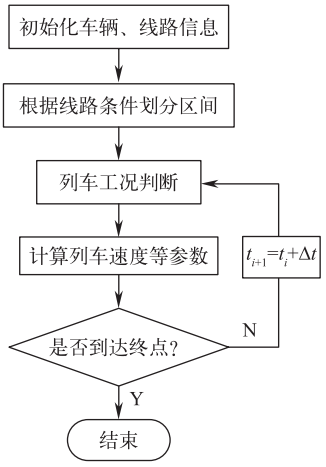

图 5 最小时分算法流程图

Fig. 5 Algorithm flowchart of the minimum time division operation strategy

4 固定时分运行曲线计算

相对最小时分运行策略而言，固定时分运行策略更符合节能运行的要求，因此实际运行中不采用最小时分运行策略，而是使用固定时分运行策略。固定时分运行策略是指列车在该策略下在站间的运行时间是固定的，该策略包含牵引、匀速、惰行和制动四种工况[20]。固定时分运行策略相较于最小时分运行策略的不同之处在于：固定时分运行策略是在最小时分运行策略的基础上，采用插入惰行的方式实现节能运行。当列车惰行时，列车不提供牵引力，仅受到阻力作用。固定

时分运行策略示意图如图6所示。

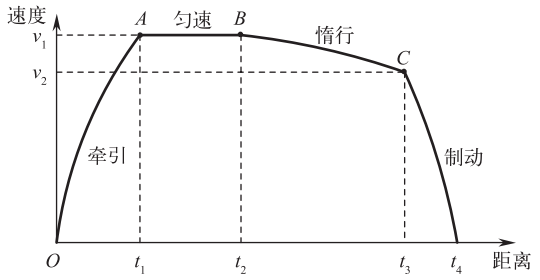

图 6　固定时分运行策略示意图

Fig. 6 Schematic diagram of the fixed time division operation strategy

每种工况列车受到的合力表达式为

$$c(v)=\begin{cases}F(v)-w(v), & 0\leqslant t<t_1\\ 0, & t_1\leqslant t<t_2\\ -w(v), & t_2\leqslant t<t_3\\ B(v)-w(v), & t_3\leqslant t<t_4\end{cases} \tag{12}$$

固定时分运行策略的编程思路：首先要确定插入惰行工况的位置，对列车运行区间进行划分，每次都选择在制动工况前插入惰行工况。在最小时分运行曲线的基础上，以每个制动工况作为每个子区间划分结束点。因此，把整个运行曲线划分成以惰行工况结束的多个子区间。固定时分策略下的总运行时间与最小时分策略下的总运行时间的差值称为区间富裕时间[21]。固定时分运行策略的关键问题是总区间富裕时间在各个已划分子区间的时间分配问题。针对富裕时间的分配问题，目前已有的几种方法分别是基于区间限速差的富裕时间分配、平均分配和基于区间长度的富裕时间分配。本文选择使用的是基于区间长度的富裕时间分配方法，先把整个区间按限速划分成n个子区间，再根据已知的固定时间运行时分和最小时间运行时分作差计算得到总的区间富裕时间，然后根据子区间的区间长度占总区间长度的比例分配富裕时间，最终得到各个子区间分配后的运行时间，具体的计算公式为

$$T_{\text{extra}}=T_{\text{fix}}-T_{\min} \tag{13}$$

$$T_{i,\text{extra}}=\frac{(S_{i+1}-S_i)}{S}T_{\text{extra}} \tag{14}$$

式中，T_{fix}为区间固定运行时分；$T_{\min}$为区间最小运行时分；T_{extra}为总区间富裕时间；S_i为子区间初始位置；S_{i+1}为子区间结束位置；$T_{i,\text{extra}}$为子区间分配到的富裕时间。

总的富裕时间在各个子区间分配完成之后，还需要通过在最小时分运行策略的基础上插入惰行工况的方法，实现固定时分运行。从高限速至低限速段插入惰行工况的示意图如图7所示。假设CA段为匀速运行段，CO段为惰行段，AO段为制动段，BXO段为惰行段与制动段组合。

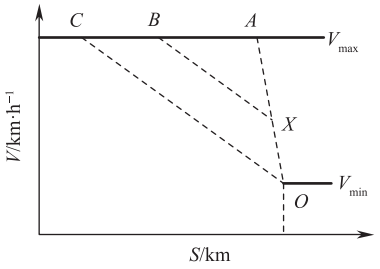

图 7　插入惰行工况示意图

Fig. 7 Insert the idle working condition diagram

插入惰行工况算法步骤：

1）目前已知量有分配到该区间的富裕时间T_{extra}、AO段对应时间T_{break}、CO段对应的时间T_{coast}、CA段对应的时间T_{ave}、BXO段对应的时间T和允许时间误差为T_{error}。

2）$\Delta t=T_{\text{coast}}-(T_{\text{ave}}+T_{\text{break}})$，若$\Delta t\leqslant T_{\text{extra}}$，执行下一步；否则$n$=1，跳转至步骤4）。

3）分配到该区间的富裕时间过多，列车将按CO惰行线运行，跳转至步骤8）。

4）从O点反推n个时间步长的制动段至X点。

5）从X反推惰行段至限速$V_{\max}$，与CA匀速段相交于B点。计算BA段所用时间T_{BA}，那么$\Delta t=T-(T_{BA}+T_{\text{break}})$，如果$|\Delta t-T_{\text{extra}}|<T_{\text{error}}$，则跳转至步骤8）；如果$\Delta t<T_{\text{extra}}$，跳转至步骤6）；如果$\Delta t>T_{\text{extra}}$，跳转至步骤7）。

6）选取XO段的最后一个时间步长的时间中点为X点，返回步骤5）。

7）$n=n+1$，返回步骤5）。

8）本段结束。

插入惰行算法流程图如图8所示。

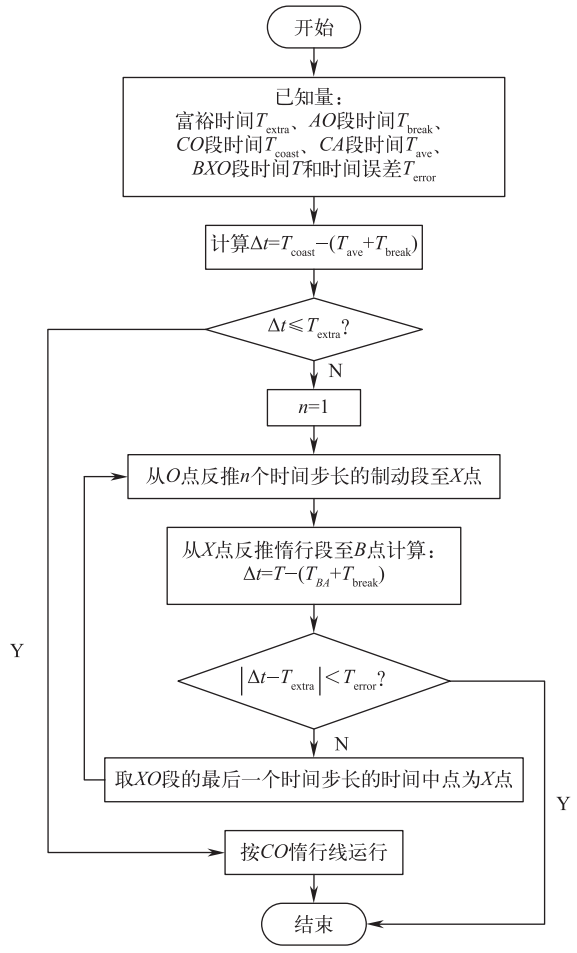

图 8　插入惰行算法流程图

Fig. 8 Algorithm flowchart of inserting the idle working condition diagram

固定时分运行策略算法流程图如图9所示。

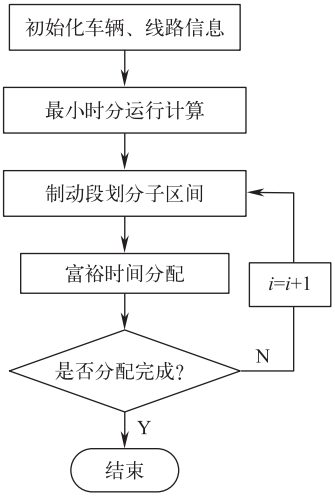

图 9　固定时分算法流程图

Fig. 9 Algorithm flowchart of the fixed time division operation strategy

固定时分算法步骤：

1）对车辆及线路信息进行初始化设置。

2）计算列车最小时分运行策略曲线。

3）根据制动段划分区间，即每个子区间以制动工况结束。

4）利用式（13）和式（14）进行富裕时间分配。

5）判断是否分配完成，若没有，则$i=i+1$，返回步骤3）；否则结束。

5　计算结果与分析

本文根据北京地铁某线部分线路数据（5个车站）在MATLAB中使用M语言编写了最小时分运行策略算法程序和固定时分运行策略算法程序。通过运行列车牵引计算程序进行仿真计算，并对仿真结果进行分析。首先要对牵引制动特性曲线进行编程。从前文提到的牵引特性曲线与制动特性曲线可知，两条曲线分别为分段函数，图10和图11分别为牵引特性曲线与制动特性曲线仿真结果。

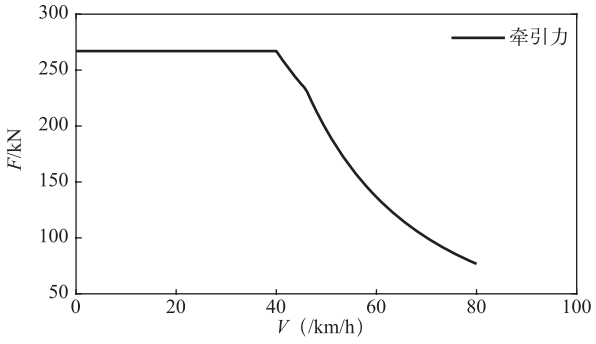

图 10　牵引特性曲线结果

Fig. 10 Traction characteristic curve result

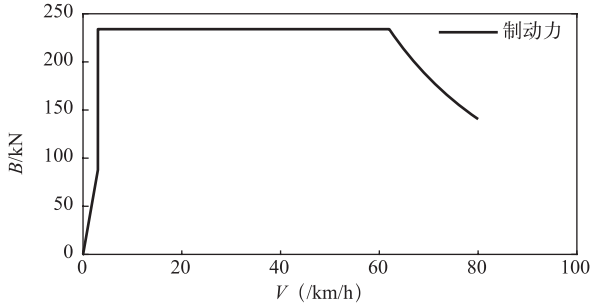

图 11　制动特性曲线结果

Fig. 11 Braking characteristic curve result

图12为北京地铁某线部分线路采用最小时分运行策略得到的列车速度-里程曲线仿真结果。仿真结果显示，列车最小时分运行曲线由牵引-匀速-制动三种工况组成，且列车运行速度不超过区间限速，并能保证到站停车。

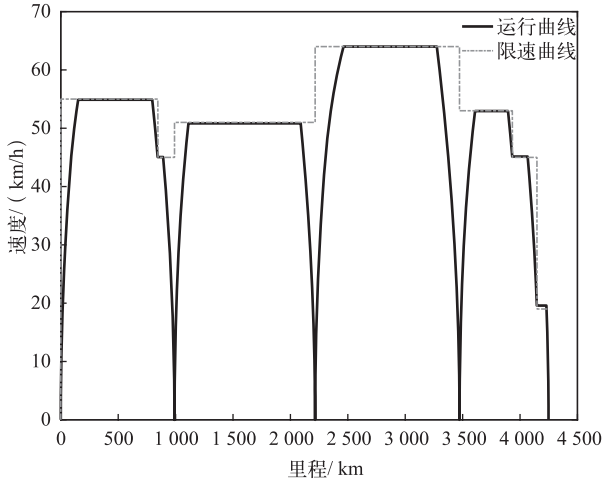

图 12　最小时分速度 - 里程曲线结果

Fig. 12 Minimum time speed-mileage curve result

图13为在最小时分运行策略下列车的功率-时间曲线仿真结果。结果表明，当列车处于最大牵引工况时，列车的功率为正；当列车处于匀速工况时，列车的功率维持恒定；当列车处于最大制动工况时，列车的功率为负。

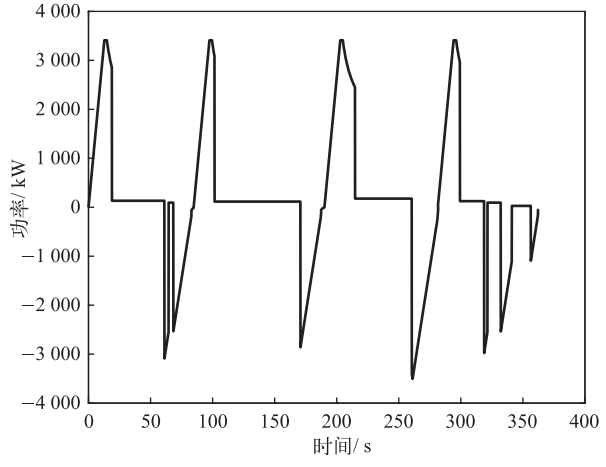

图 13　最小时分功率 - 时间曲线结果

Fig. 13 Minimum time power-time curve result

图14为北京地铁某线部分线路采用固定时分运行策略得到的列车速度-里程曲线仿真结果。仿真结果显示，列车固定时分运行曲线由牵引-匀速-惰行-制动四种工况组成，且列车在站间运行时间固定，保证到点到站停车。

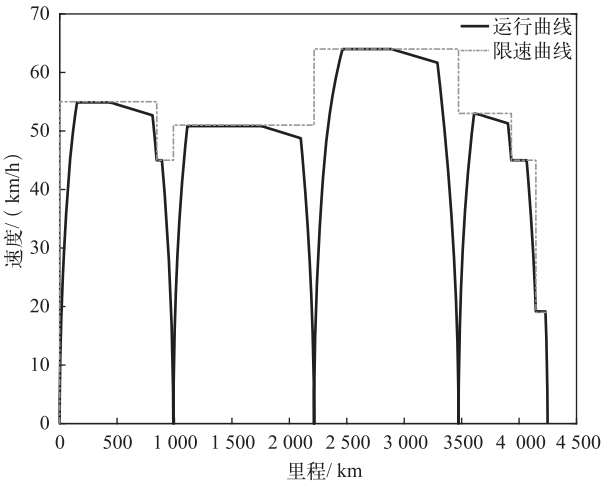

图 14　固定时分速度 - 里程曲线结果

Fig. 14 Fixed time speed-mileage curve result

图15为在固定时分运行策略下列车功率-时间曲线仿真结果。结果表明，固定时分运行策略是在最小时分运行策略的基础上插入惰行工况。当列车处于牵引工况时，列车的功率为正；当列车处于匀速工况时，列车的功率维持恒定；当列车处于惰行工况时，此时列车不受任何牵引力和制动力作用，仅受列车阻力的作用，该工况下的列车牵引或制动功率为0；当列车处于制动工况时，列车的功率为负。

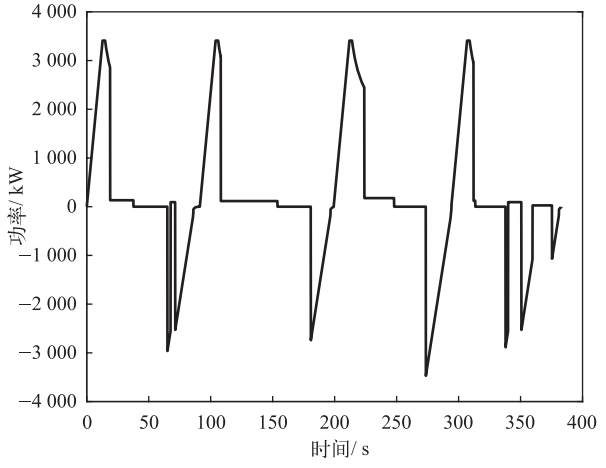

图 15　固定时分功率 - 时间曲线结果

Fig. 15 Fixed time power-time curve result

最小时分和固定时分策略下各站运行时间及能耗见表2，其中包括最小时分和固定时分运行策略下的各个站间的运行时间、总站间运行时间和总牵引能耗结果。将最小时分和固定时分的仿真结果进行对比发现，在线路条件相同的情况下，固定时分相较于最小时分总的运行时间只增加了26.5 s，总牵引能耗值相比最小时分却减小8.87 kW·h，实现了列车的节能运行。因此固定时分运行策略更符合列车节能运行要求。

表 2　各站运行时间及能耗

Tab. 2 Running time and energy consumption of each station

车站	站间距 /m	最小时分 /s	固定时分 /s
1	-	-	-
2	990	84.1	90.2
3	1 225	102	109.6
4	1 257	90.1	98.0
5	776	81.2	86.1
总站间运行时间 /s		357.4	383.9
总牵引能耗 /kW·h		54.26	45.39

6　结束语

本文通过分析列车的动力学原理，建立了列车受力模型，分析最小时分和固定时分策略包含的工况序列，结合给定线路的条件信息划分限速区间，通过编写最小时分和固定时分程序，最终求得列车在两种运行策略下的运行曲线。将两种运行方式下的列车牵引能耗值进行对比，得出固定时分运行策略更符合列车节能运行要求的结论。

本文研究的列车节能优化问题是一个十分复杂的课题，目前仍存在一些问题，未来仍有很多工作需要研究。论文编写的程序目前还存在准确度低的问题，因此还需要寻找准确度更高的编程方法。后续还可以考虑如何优化列车运行曲线，提高列车运行曲线计算的准确度；研究除本文提到的两种运行策略之外的其他运行策略曲线以及将牵引供电系统、超级电容和电池等储能装置考虑在内的列车运行仿真建模方法等。

参考文献

[1] 赵莹莹．考虑再生制动能量利用的城轨交通多列车节能运行研究[D]．北京：北京交通大学，2015．

[2] 中国城市轨道交通协会．城市轨道交通2020年度统计和分析报告[EB/OL]．https://www.camet.org.cn/tjxx/7647．

[3] 荀径，杨欣，宁滨，等．列车节能操纵优化求解方法综述[J]．铁道学报，2014，36(4)：14-20．

[4] 崔超．城市轨道交通列车节能运行优化研究与仿真验证[D]．成都：西南交通大学，2017．

[5] 毛芳．考虑牵引供电特性的列车运行曲线优化方法[D]．北京：北京交通大学，2019．

[6] 宿硕．城轨列车节能驾驶策略与储能式再生能量利用研究[D]．北京：北京交通大学，2018．

[7] 金炜东，靳蕃，李崇维，等．列车优化操纵速度模式曲线生成的智能计算研究[J]．铁道学报，1998(5)：3-5．

[8] 冯晓云，何鸿云，朱金陵．列车优化操纵原则及其优化操纵策略的数学描述[J]．机车电传动，2001(4)：13-16．

[9] LIU R，GOLOVITCHER I M．Energy-efficient operation of rail vehicles[J]．Transportation Research Part A：Policy and Practice，2003，37(10)：917-932．

[10] MIYATAKE M，HIDEYOSHI K O．Optimization of train speed profile for minimum energy consumption[J]．IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering，2010，5(3)：263-269．

[11] LU S，HILLMANSEN S，HO T K，et al．Single-train trajectory optimization[J]．IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems，2013，14(2)：743-750．

[12] 白瑞松，王俊国．列车动力学模型研究[J]．企业技术开发，2015，34(9)：7-8．

[13] 何之煜，杨志杰，吕旌阳，等．基于粒子群算法的高速列车节能研究[J]．铁道科学与工程学报，2019，16(7)：1622-1627．

[14] SU S，LI X，TANG T，et al．A subway train timetable optimization approach based on energy-efficient operation strategy[J]．IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems，2013，14(2)：

883-893.

[15] 赵乐．基于再生制动的地铁列车时刻表优化模型与算法研究[D]．北京：北京交通大学，2014．

[16] HE D，YANG Y，ZHOU J，et al．Optimal control of metro energy conservation based on regenerative braking：a complex model study of trajectory and overlap time[J]．IEEE Access，2019（7）：68342-68358．

[17] 王彬．城轨交通地面式超级电容储能系统容量配置优化方法研究[D]．北京：北京交通大学，2015．

[18] 刘海东，陈绍宽，褚琴，等．具有固定运行时分的列车运行控制系统研究[J]．北方交通大学学报，2002(5)：24-27．

[19] CHEN J F，LIN R L，LIU Y C．Optimization of an MRT train schedule：reducing maximum traction power by using genetic algorithms[J]．IEEE Transactions on Power Systems，2005，20(3)：1366-1372．

[20] 唐海川．城市轨道交通多列车运行节能优化控制[D]．成都：西南交通大学，2015．

[21] 邢颖．基于再生制动能量吸收的城轨列车节能运行研究[D]．成都：西南交通大学，2019．

作者简介

蒋露晴（2000—），女，硕士研究生，主要从事列车节能运行研究。

（收稿日期：2021-07-12）