# 多压力角双接触特殊齿轮精确三维建模研究

黎超，刘祥环，胡晓岚，谢立湘，袁仲谋，陈勇智
株洲齿轮有限责任公司　湖南株洲　412000

**摘要：**基于多压力角双接触特殊齿轮的设计理论及加工工艺，提出了一种多压力角双接触特殊齿轮产品的三维建模方法。该方法利用数学工具软件对齿面进行高精度计算，得到齿面坐标点，利用三维软件对坐标点进行拟合，形成高精度三维齿面，通过对比理论计算结果与三维建模结果，使其精度满足有限元分析要求，对于多压力角双接触齿轮的强度计算、NVH仿真分析及产业化制造有极其重要的作用。

**关键词：**多压力角双接触特殊齿轮齿面方程；齿面点云计算；三维建模

齿轮传动具备传递效率高、传动平稳、结构紧凑、传递转矩及速度范围广等优点，广泛应用于汽车、工程机械、农业机械及军工产品等领域，是目前应用最广泛的一种机械传动形式[1]。齿轮啮合过程中，因为轮齿的刚度随着啮合线总长度的变化而变化，会存在周期性波动，产生不可避免的传递误差，从而使得传动系统存在无法避免的振动和噪声，尤其在乘用车传动领域，传动系统的NVH问题已经成为业内的关注重点[2]。同时，斜齿轮在外载荷作用下产生弯扭组合变形，导致载荷沿接触线分布不均匀，产生偏载现象[3-6]。虽然对齿面进行微观修形能够在一定程度上改善这种现象，但是齿面修形对齿轮的制造精度要求极高，直接影响齿轮产品的制造成本和生产效率。株洲齿轮有限责任公司已经将多压力角双接触齿轮产品在电动汽车领域应用，并取得了较好的应用效果[7]，且目前从产品设计、刀具设计、制造工艺到产品检测全流程技术难题都已攻克。要提高多压力角双接触齿轮的设计、仿真分析、生产效率，实现批量应用，就需要推导出齿面的方程并以此来建立精确的三维模型，利用有限元分析技术来模拟齿轮啮合过程，来指导产品的设计和制造工作。

## 多压力角双接触齿面方程

### 1.刀具截面形状

多压力角双接触齿轮对的刀具截面[8]形状如图1所示。该刀具截面可以根据需求，设计出更多的压力角，其中$\alpha_1$为标准压力角，$\alpha_2$为剪除干涉量压力角，$\alpha_3$



万方数据

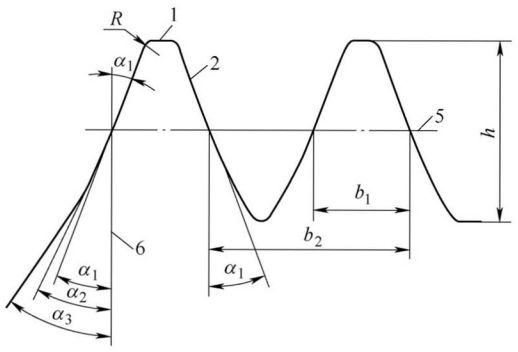



图1　多压力角双接触齿轮刀具截面

为齿顶倒棱压力角。

## 2.齿面方程

依据多压力角双接触齿轮的刀具截面（L/R分别代表刀具的左右齿面），可以建立刀具截面矢量方程如下。

$$\mathrm{R}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{Kf}}(t)=\begin{bmatrix} -h_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{n}}+x_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}+\sum_{i=1}^{\mathrm{n-1}}t_{\mathrm{ie}}\cos\alpha_{\mathrm{i}}+t_{\mathrm{n}}\cos\alpha_{\mathrm{n}} \\ \pm\frac{\pi}{4}m_{\mathrm{n}}+h_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{n}}\tan\alpha_{\mathrm{l}}\mp\sum_{i=1}^{\mathrm{n-1}}t_{\mathrm{ie}}\cos\alpha_{\mathrm{ni}}\mp t_{\mathrm{n}}\sin\alpha_{\mathrm{n}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中　$\alpha_{\mathrm{i}}$——刀具切削刃上的第$i$个法向压力角；

$\mathrm{m_n}$——刀具法向模数；

$h_{\mathrm{a}}$——刀具齿顶高系数；

$x_{\mathrm{n}}$——变为系数；

$t_{\mathrm{i}}$——对应压力角下齿面参数$t$的取值范围，

$t_{\mathrm{i}}=[t_{\mathrm{i0}}，t_{\mathrm{ie}}]$。

刀尖圆角面矢量方程为

$$\mathrm{R}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{Kr}}(\theta)=\begin{bmatrix} -h_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{n}}+x_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}-\rho\cos\theta+\rho\sin\alpha_{\mathrm{l}} \\ \pm\left(\frac{\pi}{4}m_{\mathrm{n}}-h_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{n}}\tan\alpha_{\mathrm{l}}-\rho\cos\alpha_{\mathrm{l}}+\rho\sin\theta\right) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中　$\rho$——刀具刀尖圆角半径；

$\theta$——刀尖圆角面运动参数。

根据多压力角双接触齿轮的加工原理，建立如图2所示加工坐标系，其中，$S_{\mathrm{n}}$（$O_{\mathrm{n}}X_{\mathrm{n}}Y_{\mathrm{n}}Z_{\mathrm{n}}$）为刀具法向坐标系，与刀具固连；$S_{\mathrm{p}}$（$O_{\mathrm{p}}X_{\mathrm{p}}Y_{\mathrm{p}}Z_{\mathrm{p}}$）为运动坐标系，$\beta$为齿轮螺旋角，$u$为齿向运动参数；$S_{\mathrm{o}}$（$O_{\mathrm{o}}X_{\mathrm{o}}Y_{\mathrm{o}}Z_{\mathrm{o}}$）为固定坐标系，其$Z$轴与圆柱齿轮的轴线重合，$r_{\mathrm{l}}$为圆柱齿轮分度圆半径；$S_{\mathrm{l}}$（$O_{\mathrm{l}}X_{\mathrm{l}}Y_{\mathrm{l}}Z_{\mathrm{l}}$）为齿轮运动坐标系，$\phi$为齿廓运动参数。利用空间坐标转换，即可得到多压力角双接触齿轮的齿面方程和齿根过度圆角方程。

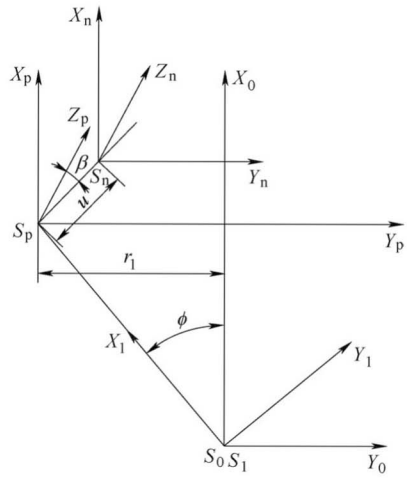



图2　多压力角双接触齿轮加工坐标系

## 3.齿面坐标计算

经过坐标转换得到的齿面方程和齿根过度圆角方程分别表示为$\mathrm{R}_{\mathrm{li}}^{\mathrm{Kf}}(u,t_{\mathrm{i}},\varphi)$，$\mathrm{R}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{Kr}}(u,\theta,\varphi)$，根据空间共轭曲面啮合原理，啮合点的相对运动速度矢量与该啮合点的法向量垂直，因而有

$$f_{\mathrm{l}}=\vec{n}_{\mathrm{f}}\cdot\vec{v}^{21}=0 \tag{3}$$

$$f_2=\vec{n}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{v}^{21}=0 \tag{4}$$

式中　$\vec{n_{\mathrm{f}}}$——齿面法向量；

$\vec{n_{\mathrm{r}}}$——刀尖圆角面法向量；

$\vec{v}^{21}$——刀具切削刃或刀尖圆角面与齿面的相对速度。

根据空间微分几何学，利用刀具齿面方程可以计算得到$\vec{n_{\mathrm{f}}}$、$\vec{n_{\mathrm{r}}}$、$\vec{v}^{21}$。

$$\vec{n}_{\mathrm{f}}=\begin{bmatrix} -\sin\alpha_{\mathrm{i}} \\ \pm\cos\alpha_{\mathrm{i}}\cos\beta \\ \mp\cos\alpha_{\mathrm{i}}\sin\beta \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\vec{n}_{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix} -\cos\theta \\ \pm\cos\beta\sin\theta \\ \mp\sin\beta\sin\theta \end{bmatrix} \tag{6}$$



万方数据

$$\vec{v}^{21}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -\omega_1\\ \mathrm{R_p}(x) & \mathrm{R_p}(y) & \mathrm{R_p}(z)\end{vmatrix} \tag{7}$$

式中 $\omega_1$——被加工齿轮转速；

$\mathrm{R_p}(x/y/z)$——刀具位置矢量$\mathrm{R_n^{Kf}}(t)$、$\mathrm{R_n^{Kr}}(\theta)$在运动坐标系$S_p$（$O_pX_pY_pZ_p$）中的坐标分量。

联立以上方程，可以得到两个三元非线性方程组

$$\begin{cases}\mathrm{R_1^{Kf}}(t_i,\ u,\ \phi)\\ \mathrm{f_1}(t_i,\ u,\ \phi)=0\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}R_1^{Kr}(u,\theta,\phi)\\ \mathrm{f_2}(u,\theta,\phi)=0\end{cases} \tag{9}$$

编写计算机求解程序文件，计算式（8）和式（9），并控制好齿面边界条件，即可得到多压力角双接触齿轮的齿面点云数据，从而利用三维软件拟合齿轮的精确三维模型。

## 三维建模

根据表1中的齿轮设计基本参数和各压力角的值，计算出运动参数$t_i$、$u$、$\theta$的边界值，分别代入式（8）和式（9）中进行非线性方程求解，即可得到多压力角双接触齿轮的齿面点云数据，将点云数据导入到CREO软件中进行拟合，可得到如图3所示的齿面曲线，利用软件的曲面拟合和布尔运算，可得到多压力角双接触齿轮的三维几何模型如图4所示。

**表1 多压力角双接触齿轮参数**

| 产品名称 | 齿数 | 模数/mm | 压力角（°） | 螺旋角（°）/旋向 | 中心距/mm | 齿宽/mm | 渐开线起始圆直径/mm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 主动齿轮 | 29 | 1.593 | 15 | 28/L | 95 | 25 | 50.272 |
| 从动齿轮 | 79 | 1.593 | 15 | 28/R | 95 | 25 | 136.917 |

根据自主开发的多压力角双接触齿轮计算软件计算出齿轮参数结果，对比模型齿面关键点的几何尺寸，证实了该建模方法的准确性，模型精度达到有限元分析标准。

## 结语

1）据多压力角双接触齿轮的设计及加工原理[9-11]，

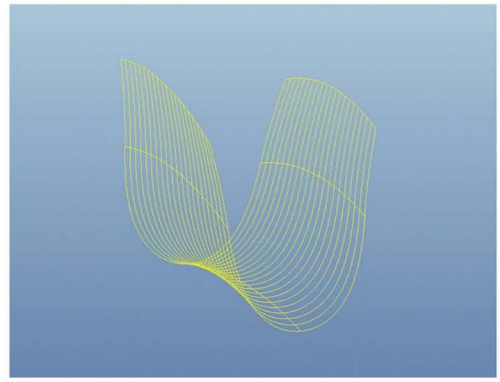


图3 齿轮齿面点云拟合线

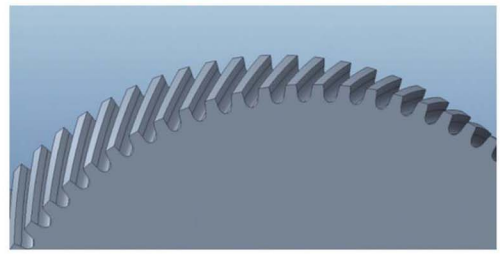


图4 齿轮三维模型

推导出该齿制齿轮副的齿面及齿根圆角面方程。

2）通过求解三元非线性方程组，计算出齿面点云数据，并利用三维设计软件CREO进行点云数据拟合，从而建立精确的多压力角双接触齿轮三维模型。

3）通过三维建模数据和理论计算数据对比，该模型精度已达到齿轮副有限元分析要求，下一步将对多压力角双接触齿轮副进行有限元网格处理并进行有限元分析。

4）该齿制齿轮副有着高强度、低温升、低冲击噪声等优点，已经小批量在乘用车和新能源汽车领域推广。随着理论研究的深入和设计方法的完善，大幅缩短了刀具设计和加工周期，该特殊齿制齿轮将会向其他领域全面推广。

**参考文献：**

[1] 王刚强. 修形斜齿轮啮合刚度解析模型与系统振动特性研究[D].重庆：重庆大学，2018.

[2] NI G，ZHU C，SONG C，et al. Tooth contact analysis of crossed beveloid gear transmission with parabolic modification[J]. Mechanism & Machine Theory，2017，113：40-52.

[3] HAN Q，ZHAO J，CHU F. Dynamic analysis of a geared rotor system considering a slant crack on the

（下转第39页）



万方数据

表9 原位置返修操作步骤

| 序号 | 操作步骤 | 操作内容 | 工具 |
|---|---|---|---|
| 1 | 手动松脱螺钉 | 使用工具手动松脱FDS螺纹 | 返修套筒、棘轮扳手或无线定扭螺钉旋具 |
| 2 | 钻孔 | 钻孔并清理碎片及毛刺 | 钻头直径7.3mm（M5 螺钉为例） |
| 3 | 铆接 | 使用铆接枪进行拉铆，确保铆钉头与钣金法兰接触良好后进行拉铆 | 空心铆钉连接气动铆枪 |
| 4 | 检查 | 1）铆接翻边均匀且与通孔同心<br>2）铆钉固定后终端不转动<br>3）翻边与底层基材有360°全面接触<br>4）基材无损伤迹象<br>5）如果抽芯铆钉返修失败，则取出抽芯铆钉再返修 | |

表10 FDS连接返修对应铆钉规格 （单位：mm）

| FDS规格 | 名称/规格 | 适用板厚 | 开孔直径 |
|---|---|---|---|
| M4 | 全铁马头铆钉 6.4×10.5 | 2.0～4.5 | 6.6（0，+0.4） |
| | 全铁马头铆钉 6.4×12.5 | 3.0～6.5 | 6.6（0，+0.4） |
| M5 | 全铁马头铆钉 6.4×12.5 | 3.0～6.5 | 6.6（0，+0.4） |

表11 其他连接位置返修步骤

| 序号 | 操作步骤 | 操作内容 | 工具 |
|---|---|---|---|
| 1 | 选预开孔位置并清洁 | 选择原FDS开孔附件平整位置并进行表面清洁 | 角磨机 |
| 2 | 冲孔 | 使用电钻进行冲孔 | 锤子、冲头等 |
| 3 | 预钻 | 在冲孔位置使用使用4.1mm麻花钻预钻孔并进行表面清洁 | 钻头直径7.3mm（M5 螺栓为例） |
| 4 | 铆接 | 使用铆接枪在确保铆钉头与钣金法兰接触良好后进行拉铆 | 铆钉安装工具XT3气动铆枪 |

## 结语

随着轻量化车身的转型，钢铝连接车身的应用越来越广泛，对于白车身上特殊结构的连接，既想拥有足够的焊接强度又想要有合格的外观质量， FDS连接工艺有着较大的优势，相信在今后也会有着越来越广泛的应用。 AUTO1950

（上接第34页）

shaft[J]. Journal of Sound & Vibration， 2012，331（26）：5803-5823.

[4] Fuentes-Aznar A，Gonzalez-Perez I. Mathematical definition and computerized modeling of spherical involute and octoidal bevel gears generated by crown gear [J]. Mechanism & Machine Theory，2016，106：94-114.

[5] LIU H，ZHANG C， XIANG C L，et al. Tooth profile modification based on lateral- torsional-rocking coupled nonlinear dynamic model of gear system[J]. Mechanism & Machine Theory，2016，105：606-619.

[6] LIN T，HE Z. Analytical method for coupled transmission error of helical gear system with machining errors，assembly errors and tooth modifications[J]. Mechanical Systems & Signal Processing,，2017，91：167-182.

[7] 文贵华，等.一种多压力角双接触齿轮设计与制造工艺研究[J].机械设计，2021，38（8）：104-109.

[8] 文贵华，等.一种双接触滚齿刀[P]. 湖南：CN202639547U，2013-01-02.

[9] 潘晓东，文贵华. 齿轮及齿轮组[P]. 湖南：CN103883707B，2016-05-11.

[10]文贵华，等. 一种双接触齿轮旋动干涉量的计算方法[P]. 湖南：CN102691773B，2014-09-03.

[11]明兴祖，王红阳，金磊，等.面齿轮高速铣削表面粗糙度建模与实验分析[J].组合机床与自动化加工技术，2020，551（1）：6-9，13. AUTO1950



万方数据