

[电动机]

分数阶永磁同步电动机有限时间同步研究

文/刘思宇

大庆油田中油电能电力运维分公司监督管理中心

研究了分数阶永磁同步电动机有限时间同步问题，分析了永磁同步电动机的分数阶动态特性，基于混沌同步思想实现了永磁同步电动机的参数在线辨识，设计了有限时间控制器实现了分数阶永磁同步电动机的有限时间同步，并通过仿真验证了设计的可行性。

分数阶微积分在医学成像、信息处理和数值分析等领域广受关注。在电力电子技术领域，永磁同步电动机交流伺服系统已经在现代高性能伺服系统中得到了广泛的应用^[1]。由于分数阶系统具有强大的记忆功能，能够更精准、全面地描述对象的特质。

永磁同步电动机作为一种典型的非线性系统，在某些特定的参数和外部干扰下会出现混沌行为，主要表现在电动机转矩的强烈震荡、动态性能不稳定等。张兴华等人将永磁同步电动机分别与Arneodo与Duffing系统进行异结构同步^[2]。李东等人运用了模糊控制原理对系统参数不确定的永磁同步电动机进行了混沌同步^[3]。韦笃取等人提出了利用线性状态反馈控制方法对永磁同步电动机的混沌运动进行控制^[4]。电动机运行过程中由于干扰等不确定因素，会破坏电动机运行的效果。

本文以永磁同步电动机系统为对象，通过坐标变换，将转子磁场定向坐标系下复杂的永磁同步电动机模型转换成一种简单的无量纲数学模型，并对分数阶永磁同步电动机模型的混沌动态行为进行分析，构造出了分数阶永磁同步电动机模型的驱动系统和响应系统，实现了参数未知的永磁同步电动机系统的同步，并且保证了电动机系统的状态变量在有限时间内能够快速地收敛于平衡点。

问题描述

考虑分数阶混沌系统。

驱动系统计算式为

$$D_t^q x(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (1)$$

响应系统计算式为

$$D_t^q y(t) = Ay(t) + g(y(t)) + u(t) \quad (2)$$

式中， D_t^q 为Caputo分数阶微分算子； $A \in R^{n \times n}$ 为系统线性部分的系数矩阵； $f(x(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t)))^T$ ； $g(y(t)) = (g_1(y(t)), g_2(y(t)), \dots, g_n(y(t)))^T$ 代表系统中非线性部分； $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和 $y(t) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 分别为驱动、响应系统的状态向量； $u(t)$ 为响应系统控制律。

将设计控制律实现驱动系统与响应系统的同步。

引理1^[5]：Jensen不等式：设 $x_i \geq 0 (1 \leq i \leq n)$ ，则有以下不等式成立

$$(x_1^{c_1} + x_2^{c_1} + x_3^{c_1} + \dots + x_n^{c_1})^{\frac{1}{c_1}} \leq (x_1^{c_2} + x_2^{c_2} + x_3^{c_2} + \dots + x_n^{c_2})^{\frac{1}{c_2}}$$

引理2^[6]：对于如下分数阶系统

$$D_t^q x(t) = f(x, t)$$

式中， f 为满足 $R \times R \rightarrow R^n$ 的可微函数，满足 $f(0) = 0$ ，并且存在一个连续可导的函数 $v(t, x(t)) : [0, \infty] \times D \rightarrow R$ ，同时 $k > 0$ ， $0 < \rho < 1$ ，使得

$$q_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq q_2 \|x\|^{ab}$$

$$kV^\rho(t, x(t)) \leq q_3 \|x\|^{ab}$$

$${}_0^C D_t^q V(t, x(t)) \leq -q_3 \|x\|^{ab}$$

那么可以得出

${}_0^C D_t^\rho V(t, x(t)) \leq -kV^\rho(t, x(t))$, 系统为全局有限时间稳定, 且

$$t \leq \frac{V(x_0)^{1-\rho}}{k(1-\rho)}$$

主要内容

永磁同步电动机在 d - q 坐标系中的数学模型为^[2]

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = -\frac{Ri_d}{L_d} + \frac{L_q i_q \omega}{L_d} + \frac{u_d}{L_d} \\ \frac{di_q}{dt} = -\frac{Ri_q}{L_q} - \frac{L_d i_d \omega}{L_q} - \frac{\psi_f \omega}{L_q} + \frac{u_q}{L_q} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{n_p \psi_f i_q}{J} + \frac{n_p (L_d - L_q) i_d i_q}{J} - \frac{\beta \omega}{J} - \frac{T_L}{J} \end{cases} \quad (3)$$

式中, i_d 和 i_q 为 d 轴上的定子电流向量; u_d 和 u_q 为 q 轴上的定子电压向量; L_d 和 L_q 为 d - q 轴上的定子自感; n_p 为极对数; ω 为电动机的转子角速度; J 为转动惯量; R 为定子绕组电阻; β 为粘性阻尼系数; T_L 为外部负载转矩; ψ_f 为永磁体上产生的磁通量。

一般情况下, 当 $L_d = L_q$ 时, 系统 (3) 在断电的情形下运行, 即 $u_d = u_q = T_L = 0$, 其无量纲模型如下, 其中参数 γ 和 σ 代表参数约束条件下系统存在不同运动状态的控制参数

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = -i_d + wi_q \\ \frac{di_q}{dt} = -i_q - wi_d + \gamma w \\ \frac{dw}{dt} = \sigma(i_q - w) \end{cases} \quad (4)$$

对于永磁同步电动机系统, 其实际电容、电感以及机械惯性均具有分数阶特性, 用分数阶模型可以更准确地描述其混沌行为, 表达式为^[2]

$$\begin{cases} \frac{d^q i_d}{dt^q} = -i_d + wi_q \\ \frac{d^q i_q}{dt^q} = -i_q - wi_d + \gamma w \\ \frac{d^q w}{dt^q} = \sigma(i_q - w) \end{cases} \quad (5)$$

为便于分析, 将上式经过放射变换和时间尺度变换得到的无量纲模型为

$$\begin{cases} D^q x_1 = -x_1 + x_2 x_3 \\ D^q x_2 = -x_2 - x_1 x_3 + \gamma x_3 \\ D^q x_3 = \sigma(x_2 - x_3) \end{cases} \quad (6)$$

当系统阶次选取 $q = 0.98$, 参数满足 $\sigma = 5$,

$\gamma = 60$, $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [1, -1.5]$ 时, 系统 (6) 呈现出混沌状态, 其混沌吸引子如图 1 所示。

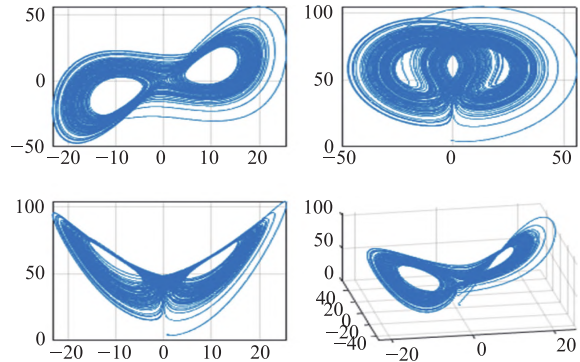


图 1 分数阶永磁同步电动机混沌吸引子图

响应系统的设计为

$$\begin{cases} D^q y_1 = -y_1 + y_2 y_3 + U_1 \\ D^q y_2 = -y_2 - y_1 y_3 + \tilde{\gamma} y_3 + U_2 \\ D^q y_3 = \tilde{\sigma}(y_2 - y_3) + U_3 \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 分别为驱动系统 (6) 中参数 γ 和 σ 的估计值; U_1 , U_2 , U_3 为待设计的控制律。

设未知参数的估计误差为

$$\begin{cases} e_\gamma = \tilde{\gamma} - \gamma \\ e_\sigma = \tilde{\sigma} - \sigma \end{cases} \quad (8)$$

定义系统的误差为 $e = y - x$, 则有

$$D^\alpha e = D^\alpha y - D^\alpha x \quad (9)$$

则系统误差为

$$\begin{cases} D^q e_1 = -e_1 + y_2 y_3 - x_2 x_3 + U_1 \\ D^q e_2 = -e_2 - y_1 y_3 + x_1 x_3 - \tilde{\gamma} y_3 - \gamma x_3 + U_2 \\ D^q e_3 = \tilde{\sigma} y_2 - \tilde{\sigma} y_3 - \sigma x_2 + \sigma x_3 + U_3 \end{cases} \quad (10)$$

若要使上述驱动系统 (6) 和响应系统 (7) 同步, 则要满足驱动-响应系统构成的误差系统 (10)

收敛, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$

定理 1: 系统 (10) 在如下控制律作用下

$$\begin{cases} U_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 - k_1 \text{sign}(e_1) |e_1|^\alpha \\ U_2 = y_1 y_3 - x_1 x_3 - \tilde{\gamma}(y_3 - x_3) - k_2 \text{sign}(e_2) |e_2|^\alpha \\ U_3 = -e_3 - \tilde{\sigma} y_2 + \tilde{\sigma} y_3 - \sigma x_3 + \tilde{\sigma} x_2 - k_3 \text{sign}(e_3) |e_3|^\alpha \end{cases} \quad (11)$$

可以实现在有限时间内稳定, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 。

$T \leq \frac{V(x_0)^{1-\rho}}{k(1-\rho)}$, 其中 $\rho = \frac{\alpha+1}{2}$, $k = \min\{k_1, k_2, k_3\} 2^{\frac{\alpha+1}{2}}$, k

和 α 为控制器参数, $k_i > 0 (i=1, 2, 3)$, $0 < \alpha < 1$ 。

证明: 未知参数辨识规则为

$$\begin{cases} D_q e_\gamma = -e_\gamma - e_2 x_3 \\ D_q e_\sigma = -e_\sigma - e_3 x_2 \end{cases} \quad (12)$$

选择Lyapunov函数为

$$V(e_1, e_2, e_3, e_\gamma, e_\sigma) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_\gamma^2 + e_\sigma^2) \quad (13)$$

则有 V 关于时间 t 的分数阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{d^q V}{dt^q} &= e_1 \frac{d^q e_1}{dt^q} + e_2 \frac{d^q e_2}{dt^q} + e_3 \frac{d^q e_3}{dt^q} + e_\gamma \frac{d^q e_\gamma}{dt^q} + e_\sigma \frac{d^q e_\sigma}{dt^q} \\ &= e_1(-e_1 - k_1 \text{sign}(e_1)|e_1|^\alpha) + e_2(e_\gamma x_3 - e_2 - k_1 \text{sign}(e_2)|e_2|^\alpha) + \\ &\quad e_3(e_\sigma x_2 - e_3 - k_1 \text{sign}(e_3)|e_3|^\alpha) - \\ &\quad e_\gamma(e_\gamma + e_2 x_3) - e_\sigma(e_\sigma + e_3 x_2) \\ &= -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_\gamma^2 - e_\sigma^2 - k_1|e_1|^{\alpha+1} - k_2|e_2|^{\alpha+1} - k_3|e_3|^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (14)$$

记 $V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_3^2$, 依引理1有

$$(|e_1|^{\alpha+1} + |e_2|^{\alpha+1} + |e_3|^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha+1}} \geq (|e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2)^{\frac{1}{2}} = (2V_1)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{d^q V}{dt^q} &\leq -k_1|e_1|^{\alpha+1} - k_2|e_2|^{\alpha+1} - k_3|e_3|^{\alpha+1} \\ &\leq -\min\{k_1, k_2, k_3\}(|e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \quad (16) \\ &= -\min\{k_1, k_2, k_3\}(2V_1)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ T &\leq \frac{V(x_0)^{1-\rho}}{k(1-\rho)}, \text{ 其中 } \rho = \frac{\alpha+1}{2}, k = \min\{k_1, k_2, k_3\}2^{\frac{\alpha+1}{2}}. \end{aligned}$$

数值仿真

系统阶次 $q=0.98$, 分数阶永磁同步电动机系统初值设为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -1.5)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1.5, -1.5, 3)$ 。未施加控制作用时, 分数阶永磁同步电动机的误差系统处于无规则状态, 误差系统的状态轨迹如图2所示。

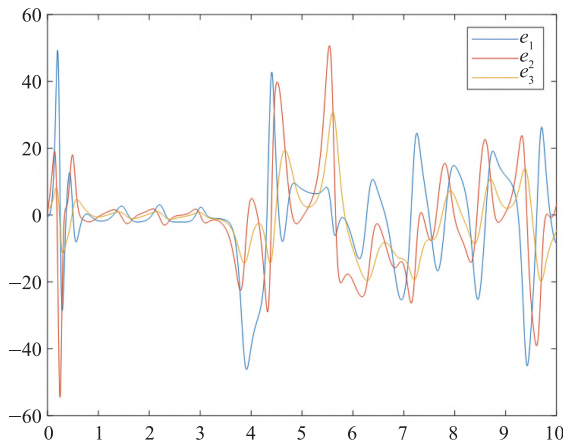


图2 无控制器的同步误差随时间变化图

将所设计的有限时间控制器加入到系统中, 不同参数时得到的同步误差状态轨迹如下图3~图5所示。

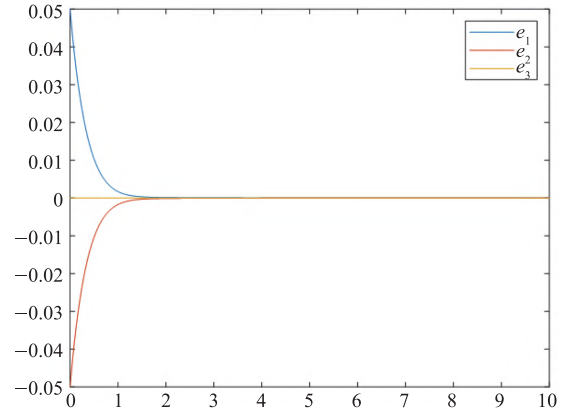


图3 $k=1, \alpha=0.8$ 时有限时间控制器下的误差状态轨迹

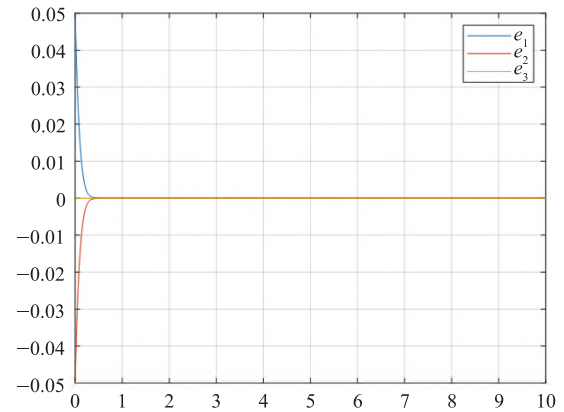


图4 当 $k=5, \alpha=0.8$ 时有限时间控制器下的误差状态轨迹

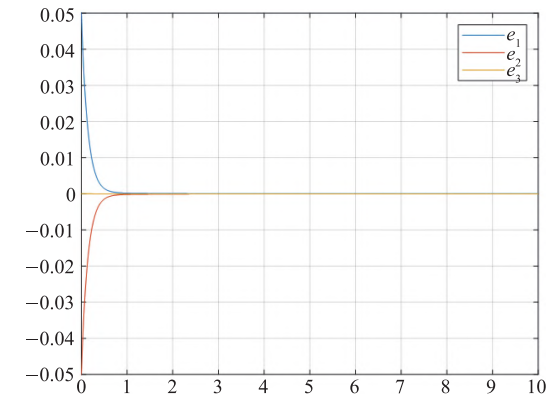
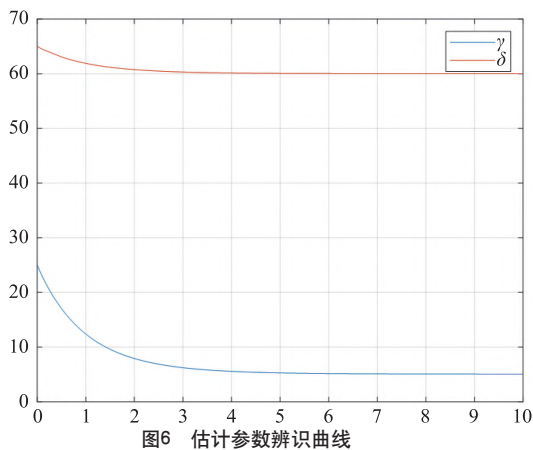


图5 当 $k=5, \alpha=0.95$ 时有限时间控制器下的误差状态轨迹

由于响应系统(7)的参数未知, 初始的估计参数为 $(\sigma(0), \gamma(0)) = (3, 8)$, 图6为两个未知参数的在线辨识曲线图, 可以看出, 辨识结果与系统参数相符, 辨识准确度高。



从图6可以看出被控系统在有限时间内识别出了未知的系统参数，成功实现了参数未知的分数阶永磁同步电动机有限时间同步，说明了所设计的控制器和参数辨识规则是有效的。

结束语

本文首先针对永磁同步电动机的数学模型进行研究，通过坐标转换建立永磁同步电动机的无量纲模型，给出了可行的有限时间控制器和参数辨识规则，保证永磁同步电动机在有限时间内到达稳定运行状态，对永磁同步电动机参数进行在线辨识并获得了良好的动态响应。仿真验证了有限时间控制器与参数辨识规则的可行性。**EA**

(收稿日期：2024-01-22)

参考文献

[1] HEMATI N. Strange attractors in brushless DC motors[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1994, 41(1): 40-45.

[2] 张兴华, 王德明. 永磁同步电动机与异结构系统的混沌同步控制[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(14): 4467-4470, 4474.

[3] 李东, 张小洪, 杨丹, 等. 参数不确定永磁同步电动机混沌的模糊控制[J]. 物理学报, 2009, 58(3): 1432-1440.

[4] 韦笃取, 罗晓曙. 非均匀气隙永磁同步电动机混沌的状态反馈控制[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2006(01): 13-17.

[5] HADI DELAVARI, DUMITRU BALEANU, JALIL SADATI. Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(4).

[6] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.

